R

۱۴-۱) مرتبهٔ ۲ یعنی چه

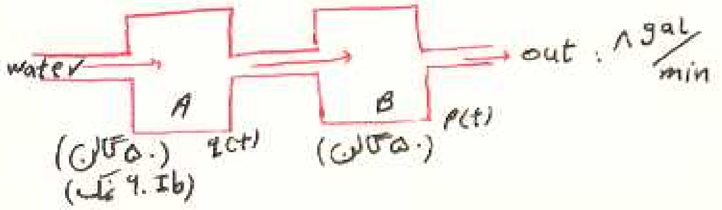
۳-۳) (ه) ۱،۲،۴ جدول ثبت چه کنیم
۳-۱۳) در کتاب مرجع داره
۳-۲۳) و ۳-۲۵) در جواب می‌خورد
۳-۱۴) حل؟

۴-۱۷) راه حل
۴-۲۳) راه حل

۵-۵) راه حل؟
۵-۹) ج: راه حل؟
۵-۱۲) جواب می‌خورد
۵-۲۳) جواب نمی‌ده
۵-۲۵) معادله چیست

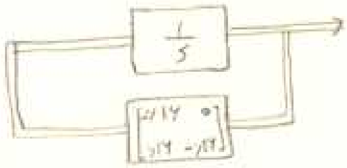
«حل مسائل کنترل پیشرفته فصل ۱»

(۱-۱



الف)
$$\begin{cases}\dot q(t) = -\dfrac{q(t)}{50}\times 8 \\ \dot p(t) = -\dot q(t) - \dfrac{p(t)}{50}\times 8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot q(t) = -0.16\, q(t) \\ \dot p(t) = 0.16\, q(t) - 0.16\, p(t)\end{cases}$$

ب)
$$\begin{bmatrix} q(t) \\ p(t)\end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} -0.16 & 0 \\ 0.16 & -0.16\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q(t) \\ p(t)\end{bmatrix} \Rightarrow$$



ج)
$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[sI-A]^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} s+0.16 & 0 \\ -0.16 & s+0.16\end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-0.16t} & 0 \\ -0.16t\, e^{-0.16t} & e^{-0.16t}\end{bmatrix}$$

د) از معادله اول: $\left.\begin{array}{l} q(t) = c_1 e^{-0.16t} \\ q(0) = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow q(t) = 90\, e^{-0.16t} \quad , t \geq 0$

از معادله دوم: $\left.\begin{array}{l} \dot p(t) + 0.16\, p(t) = 0.16\, q(t) \\ p(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p(t) = 14.4t\, e^{-0.16t} \quad , t \geq 0$

(۱-۲

الف)
$$\begin{cases} C\dfrac{dv_c}{dt} = i_L(t) \\ L\dfrac{di}{dt} = e(t) - v_c(t) - R\, i_L(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{1}{C} i_L(t) \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{L} v_c(t) - \dfrac{R}{L} i_L(t) + \dfrac{e(t)}{L}\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t)\end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L}\end{bmatrix} e(t)$$

ب)
$$\begin{cases} R = 3\ \Omega \\ L = 1\ H \\ C = \frac{1}{2}\ F\end{cases} \Rightarrow \phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[sI-A]^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

ج)
$$\begin{cases} v_c(0) = 0 \\ i_L(0) = 0\end{cases} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\cdot(x(0) + BU(s))\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v(t) = (e^{-t+1} - 1)^2 u(t-1) - (e^{-t+2} - 1)^2 u(t-2) \\ i(t) = -e^{-t+1}(e^{-t+1} - 1) u(t-1) + e^{-t+2}(e^{-t+2} - 1) u(t-2)\end{cases}$$

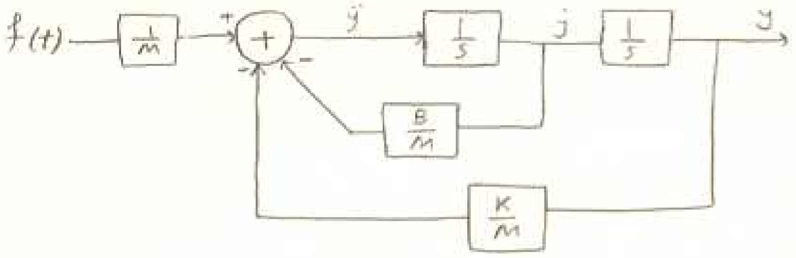
«حل مسائل کنترل بخش «فصل ۱»»

۱-۳

الف) $F = ma$

$$f(t) - T(t) - E(t) = M\ddot{y} \Rightarrow f(t) - Ky - B\dot{y} = M\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{K}{M}y - \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{f(t)}{M}$$

ب)



ج)

$$\begin{cases} M = 1 \\ K = 2 \\ B = 2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{y} = -2y - 2\dot{y} + f(t) \underset{x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + f(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

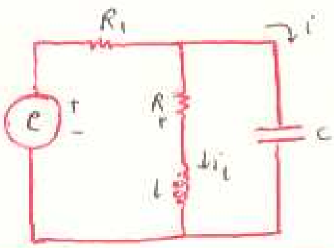
$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}\sin t \\ -2e^{-t}\sin t & e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix}$$

د)

$$\begin{cases} y(0) = 0.2 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ f(t) = 2e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}(x_0 + BU(s))\right] \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}e^{-t}\cos t + \frac{4}{5}e^{-t}\sin t + e^{-2t} \\ -\frac{2}{5}\sin t - 2e^{-2t} + 2e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

۱-۴

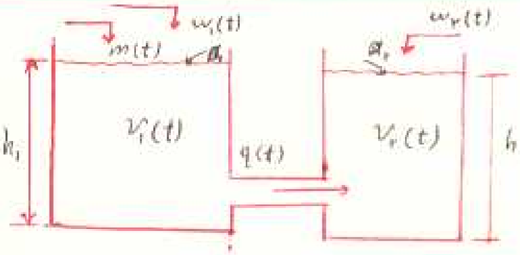


$$\begin{cases} R_1\left(i_L + c\frac{dv_c}{dt}\right) + v_c = e \\ v_c = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 c\frac{dv_c}{dt} = -v_c - R_1 i_L + e \\ L\frac{di_L}{dt} = v_c - R_2 i_L \end{cases}$$

۱-۵

$$\tau = I\alpha \Rightarrow \lambda(t) - B\dot{\theta}(t) - K\theta(t) = I\ddot{\theta}(t) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \theta(t) \\ x_2 = \dot{\theta}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{I}x_1 - \frac{B}{I}x_2 + \frac{\lambda(t)}{I} \end{cases}$$

۱-۶



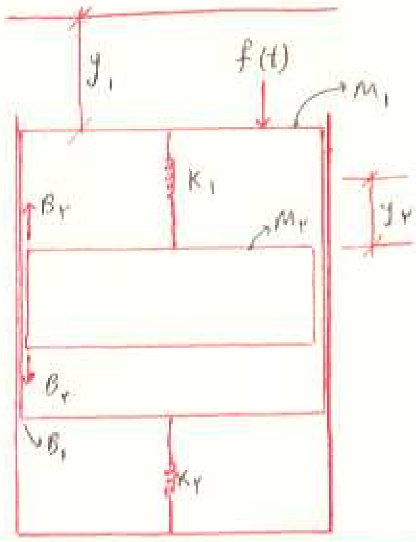
$$\begin{cases} w_1(t) + m(t) - q(t) = \alpha_1\dot{h}_1 \\ w_2(t) + q(t) = \alpha_2\dot{h}_2 \\ \dot{v}_1(t) = -\frac{v_1(t)}{h_1\alpha_1}\cdot q(t) + m(t) \\ \dot{v}_2(t) = \frac{v_1(t)}{h_1\alpha_1}\cdot q(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1\dot{h}_1 = -Kh_1 + Kh_2 + w_1(t) + m(t) \\ \alpha_2\dot{h}_2 = Kh_1 - Kh_2 + w_2(t) \\ \dot{v}_1 = -\frac{1}{h_1\alpha_1}v_1 \cdot K(h_1 - h_2) + m(t) \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{h_1\alpha_1}v_1 \cdot K(h_1 - h_2) \end{cases}$$

« حل مسائل کنترل بهینه » فصل 1

(1-7

$$\begin{cases} I\ddot{\theta}(t) = \lambda(t) - B\dot{\theta}(t) \\ \lambda(t) = k_f i_f(t) \\ K_a e(t) = R_f i_f(t) + L_f \dfrac{di_f(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dot{\theta} \\ x_2 = i_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{B}{I}x_1 + \dfrac{K_f}{I}x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{K_a}{L_f}e(t) - \dfrac{R_f}{L_f}x_2 \end{cases}$$

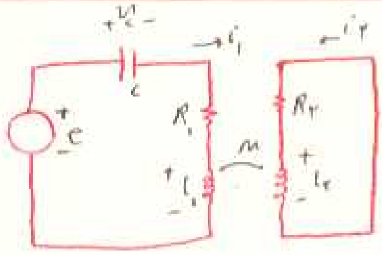
(1-8



$$\begin{cases} M_1\ddot{y}_1 = f(t) - K_2 y_1 + K_1 y_2 + B_1\dot{y}_2 \\ M_2(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = K_1 y_2 + B_2 \dot{y}_2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{y}_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_4 = \dot{y}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K_2}{M_1}x_1 - \dfrac{B_1}{M_1}x_2 + \dfrac{K_1}{M_1}x_3 + \dfrac{f(t)}{M_1} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{2K_2}{M_1}x_1 + \dfrac{2B_1}{M_1}x_2 - \dfrac{K_1}{M_1}x_3 - \dfrac{B_2}{M_1}x_4 - \dfrac{f(t)}{M_1} \end{cases}$$

(1-9



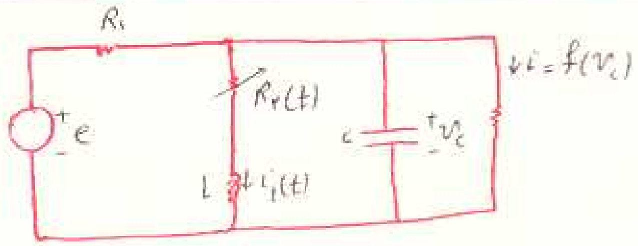
$$\begin{cases} e = v_c + R_1 i_1 + L_1\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \\ i_1 = C\dfrac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & L_1 & M \\ 0 & M & L_2 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}^{\cdot} + \begin{bmatrix} 1 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e = 0$$

با معکوس کردن ماتریس اول و ضرب در طرفین داریم:

$$\begin{bmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ \frac{L_2}{K} & \frac{L_2}{K}R_1 & -\frac{MR_2}{K} \\ -\frac{M}{K} & -\frac{MR_1}{K} & \frac{L_1R_2}{K} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L_2}{K} \\ \frac{M}{K} \end{bmatrix} e$$

$: K = M^2 - L_1L_2$

(1-10



$$\begin{cases} e = v_c(t) + R_1\left(i(t) + i_L(t) + C\dfrac{dv_c}{dt}\right) \\ R_2 i_L(t) + L\dfrac{di_L(t)}{dt} = v_c(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R_1 C\dfrac{dv_c}{dt} = e - v_c(t) - R_1 f(v_c) - R_1 i_L(t) \\ L\dfrac{di_L}{dt} = -v_c(t) - R_2 i_L(t) \end{cases}$$

۱-۱۱)

الف) $\phi(t,t)=I$

$$\left.\begin{matrix} x(t)=\phi(t,t)\,x(t_1) \\ t_1 \longrightarrow t \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix} x(t)=\phi(t,t)\,x(t) \\ \text{می‌دانیم } x(t)=I\,x(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \phi(t,t)=I$$

ب) $\phi(t_2,t_1)\phi(t_1,t_0)=\phi(t_2,t_0)$

$$\left\{\begin{matrix} x(t_2)=\phi(t_2,t_1)\,x(t_1) \\ x(t_1)=\phi(t_1,t_0)\,x(t_0) \end{matrix}\right. \longrightarrow \left.\begin{matrix} x(t_2)=\phi(t_2,t_1)\,\phi(t_1,t_0)\,x(0) \\ \text{می‌دانیم } x(t_2)=\phi(t_2,t_0)\,x(0) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \phi(t_2,t_0)=\phi(t_2,t_1)\,\phi(t_1,t_0)$$

ج) $\phi^{-1}(t_2,t_1)=\phi(t_1,t_2)$

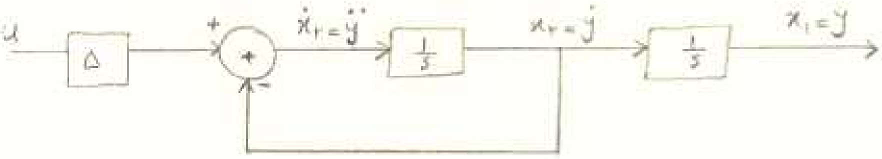
$$\left.\begin{matrix} x(t_2)=\phi(t_2,t_1)\,x(t_1) \\ \text{طرفین را در } \phi^{-1}(t_2,t_1) \text{ ضرب می‌کنیم} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \phi^{-1}(t_2,t_1)\,x(t_2)=x(t_1) \\ \text{می‌دانیم } \phi(t_2,t_1)\,x(t_2)=x(t_1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \phi^{-1}(t_2,t_1)=\phi(t_1,t_2)$$

د) $\frac{d}{dt}(\phi(t,t_0))=A(t)\phi(t,t_0)$

$$x(t)=\phi(t,t_0)\,x(t_0) \longrightarrow \left.\begin{matrix} \dot{x}(t)=\dot{\phi}(t,t_0)\,x(t_0) \\ \text{می‌دانیم } \dot{x}(t)=A(t)\,x(t) \\ \text{می‌دانیم } x(t)=\phi(t,t_0)\,x(t) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \dot{\phi}(t,t_0)=A(t)\,\phi(t,t_0)$$

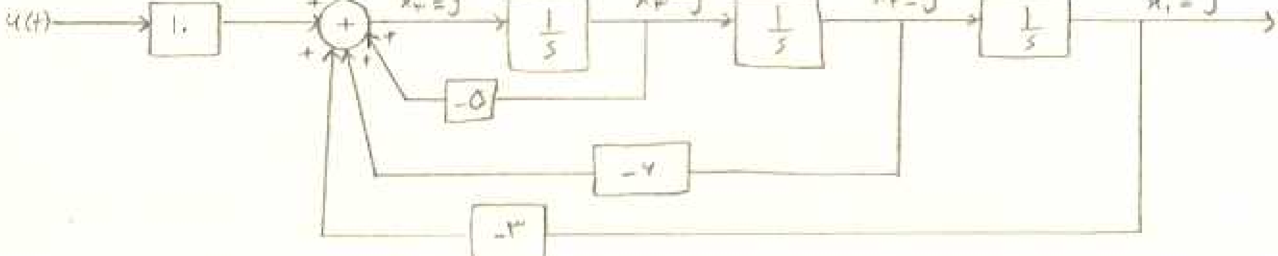
۱-۱۲)

a) $\left\{\begin{matrix} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2+x_2=5 \end{matrix}\right. \rightarrow \left\{\begin{matrix} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-x_2+5 \end{matrix}\right.$, $y=x_1$

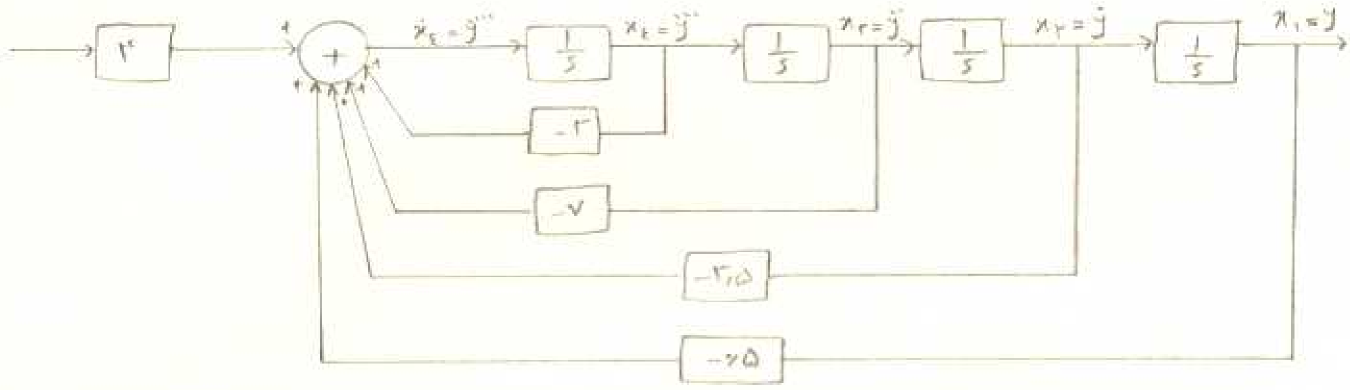


b) $\left\{\begin{matrix} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \end{matrix}\right. \rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=u \end{matrix}\right. \Rightarrow y=x_1$

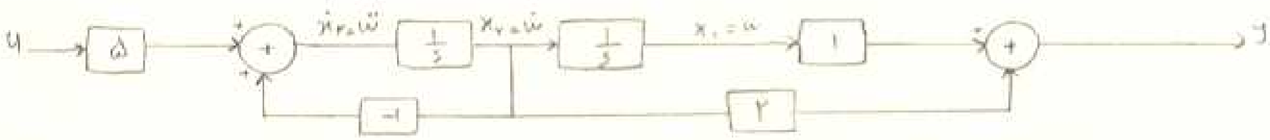
c) $\left\{\begin{matrix} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \\ x_3=\ddot{y} \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \dot{x}_3=10u-5x_3-4x_2-3x_1 \end{matrix}\right.$, $y=x_1$



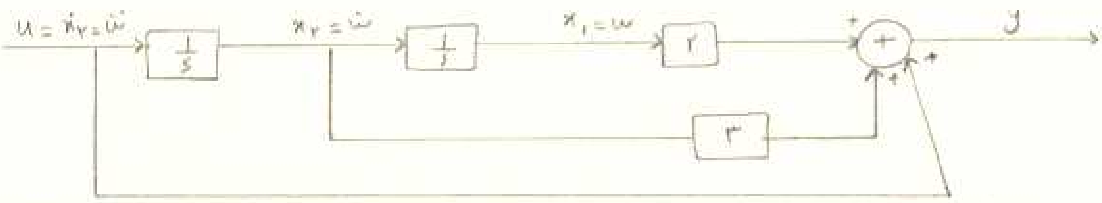
d) $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot y \\ x_3 = \ddot y \\ x_4 = \dddot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = x_3 \\ \dot x_3 = x_4 \\ \dot x_4 = 4u - 3x_4 - 7x_3 - 3.5x_2 - 25x_1 \end{cases}$ و $y = x_1$



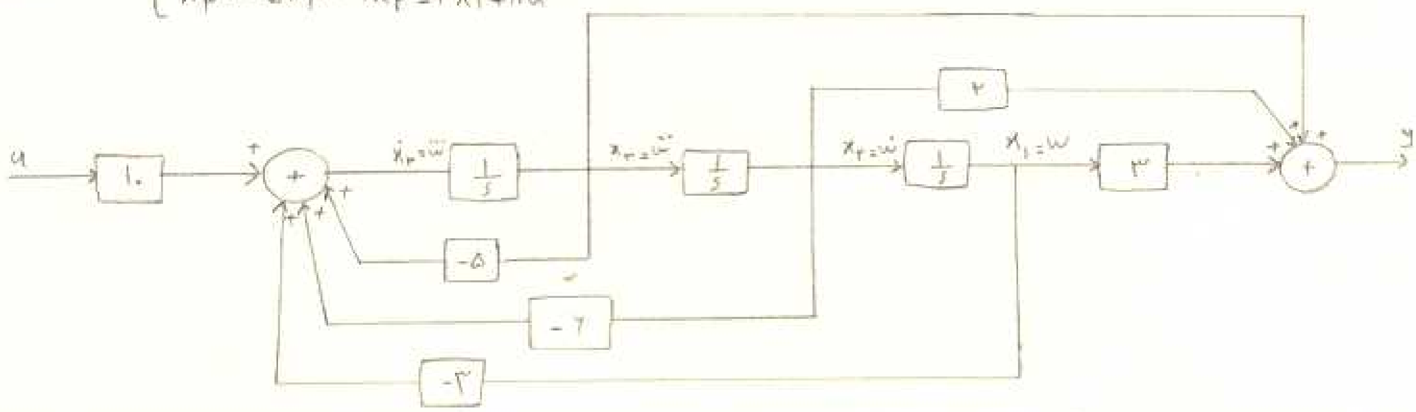
e) $\begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = \dot w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = 5u - x_2 \end{cases}$ و $y = x_1 + 2x_2$



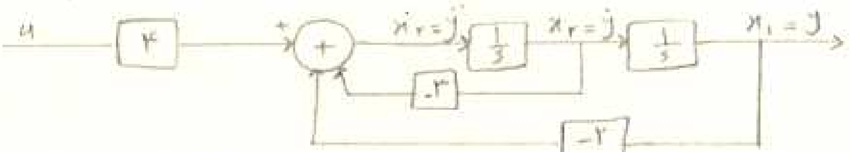
f) $\begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = \dot w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = u \end{cases}$ و $y = 2x_1 + 3x_2 + u$



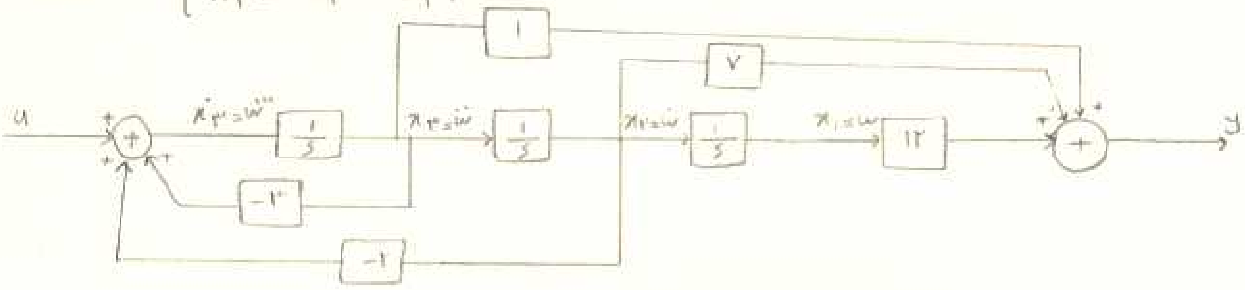
g) $\begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = \dot w \\ x_3 = \ddot w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = x_3 \\ \dot x_3 = -5x_3 - 6x_2 - 3x_1 + 10u \end{cases}$ و $y = x_3 + 2x_2 + 3x_1$



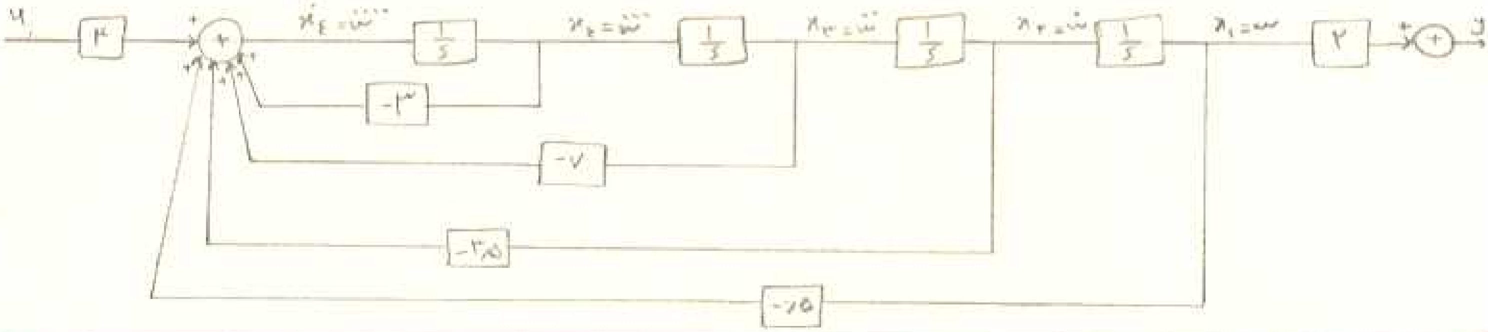
h) $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = 4u - 3x_2 - 2x_1 \end{cases}$ و $y = x_1$



i) $\begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = \dot{w} \\ x_3 = \ddot{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - 2x_2 + u \end{cases}$ و $y = x_3 + 7x_2 + 12x_1$



j) $\begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = \dot{w} \\ x_3 = \ddot{w} \\ x_4 = \dddot{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = 4u - 3x_4 - 7x_3 - 3.5x_2 - 2.5x_1 \end{cases}$ و $y = x_3 + x_2 + 2x_1$



۱-۱۳) تمام مسائل زیر با فرمول $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[sI-A]^{-1}$ حل شده است:
و با نرم افزار mathematica جوابها بدست آمده است:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\cosh(t)+\sinh(t) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t) =$ (به دلیل صحیح نبودن ریشه ها، خروجی عبارت بزرگی می شود)

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.5 & -3.5 & -7 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ (به دلیل صحیح نبودن ریشه ها خروجی عبارت بزرگی می شود)

e) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t)=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$

f) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t)=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

g) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\phi(t)=$ (مانند قسمت e است)

h) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t)=\begin{bmatrix}-e^{-2t}+2e^{-t} & -e^{-2t}+e^{-t}\\ 2e^{-2t}-2e^{-t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}$

i) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t)=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2}+\frac{e^{-2t}}{2}-2e^{-t} & \frac{1}{2}+\frac{e^{-2t}}{2}-e^{-t}\\ 0 & -e^{-2t}+2e^{-t} & -e^{-2t}+e^{-t}\\ 0 & 2e^{-2t}-2e^{-t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}$

j) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -15 & -2.5 & -7 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t)=$ (مانند قسمت d است)

(۱۴-۱)

a) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$

۱) $E=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix} \Rightarrow E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow |E|\neq 0$: کنترل پذیر است.

۲) $G=\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |G|\neq 0$ ، رویت پذیر است.

۳) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=u(t)\end{cases}$

b) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$

۱) $E=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix} \Rightarrow E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow |E|\neq 0$: کنترل پذیر است.

۲) $G=\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T\end{bmatrix} \Rightarrow G=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow |G|=0$: رویت ناپذیر است.

۳) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=u\end{cases}$

c) $A=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{c} & 0\\ \frac{L_2}{K} & \frac{L_2}{K}R_1 & -\frac{MR_2}{K}\\ -\frac{M}{K} & -\frac{MR_1}{K} & \frac{L_1R_2}{K}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{L_2}{K}\\ \frac{M}{K}\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ و $K=M^2-L_1L_2$ و $M=0$

۱) $E=[B \;\; AB \;\; A^2B] \Rightarrow E=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{cL_1} & -\frac{r_1}{cL_1^2}\\ \frac{1}{L_1} & -\frac{r_1}{L_1^2} & -\frac{L_1+cr_1^2}{cL_1^3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$

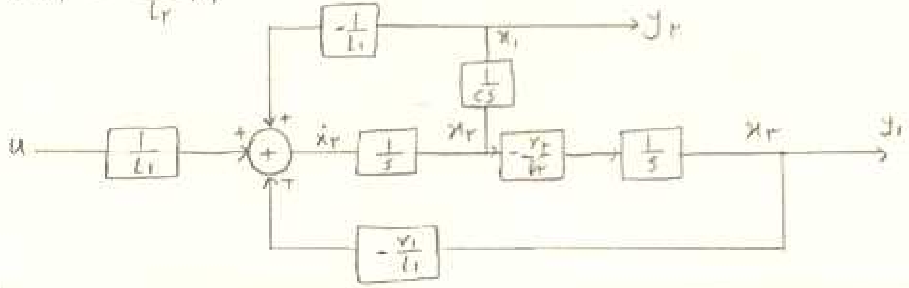
$|E|=0$

کنترل ناپذیر است

۲) $G=[C^T \;\; A^TC^T \;\; (A^T)^2C^T] \Rightarrow G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{cL_1} & \frac{r_1}{L_1^2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{c} & -\frac{r_1}{L_1} & -\frac{r_1}{cL_1} & -\frac{L_1+cr_1^2}{cL_1^2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$ مرتبه ۲ است

از روی دیاگرام هم مشخص است که رؤیت پذیر است.

۳) $\begin{cases}\dot{x}_1=\frac{1}{c}x_2\\ \dot{x}_2=-\frac{1}{L_1}x_1-\frac{r_1}{L_1}x_2+\frac{1}{L_1}u\\ \dot{x}_3=-\frac{r_2}{L_2}x_2\end{cases}$ $\quad y=\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix}$

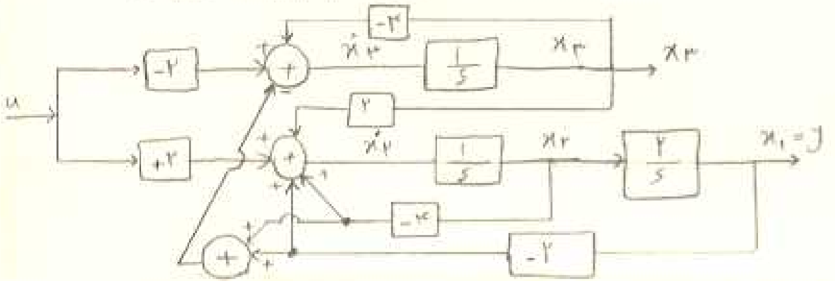


d) $A=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{c} & 0\\ \frac{L_2}{K} & \frac{L_2}{K}R_1 & -\frac{MR_1}{K}\\ -\frac{M}{K} & -\frac{MR_1}{K} & \frac{L_1R_2}{K}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{L_2}{K}\\ M\end{bmatrix}$ و $C=[1 \;\; 0 \;\; 0]$ و $\begin{cases}M=0.5\\ L_1=1\\ L_2=0.5\end{cases}$ و $\begin{cases}R_1=2\\ R_2=1\\ c=0.5\end{cases}$

۱) $E=[A \;\; AB \;\; A^2B] \Rightarrow E=\begin{bmatrix}0 & 4 & -24\\ 2 & -12 & 72\\ -2 & 14 & -104\end{bmatrix} \Rightarrow |E|\neq 0$: کنترل پذیر است

۲) $G=[C^T \;\; A^TC^T \;\; (A^T)^2C^T] \Rightarrow G=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow |G|\neq 0$: رؤیت پذیر است

۳) $\begin{cases}\dot{x}_1=2x_2\\ \dot{x}_2=-2x_1-4x_2+2x_3+2u\\ \dot{x}_3=2x_1+4x_2-4x_3-2u\end{cases}$, $y=x_1$



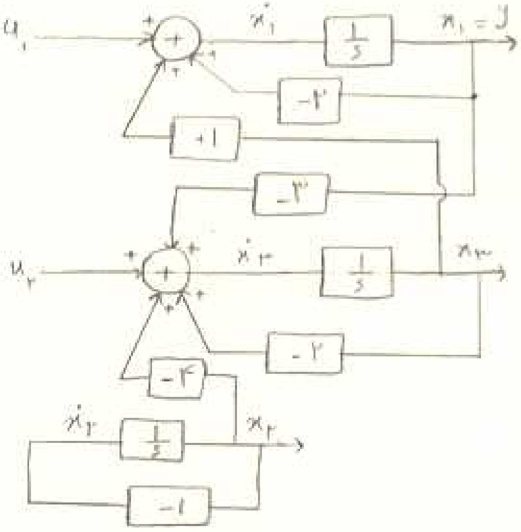
e) $A=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$

1) $E=[B \quad AB \quad A^2B] \Rightarrow E=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&1&1&-2&-4&1\\0&0&0&0&0&0\\1&0&-2&-3&1&12\end{array}\right] \Rightarrow$ مرتبه ۲ نیست

کنترل پذیر نیست: (از روی نمودار هم مشخص است)

2) $G=[C^T \,\vdots\, A^TC^T \,\vdots\, (A^T)^2C^T] \Rightarrow G=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&0&-4\\0&1&-3\end{bmatrix} \Rightarrow |G|\neq 0$: رویت پذیر است.

3) $\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+x_3+u_2\\ \dot{x}_2=-x_2\\ \dot{x}_3=-3x_1-4x_2-2x_3+u_1\end{cases}$ و $y=x_1$



f) $A=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-1&1\\-3&0&-2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$

1) $E=[B \quad AB \quad A^2B] \Rightarrow E=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&1&1&-2&-4&1\\0&0&1&0&-3&-3\\1&0&-2&-3&1&12\end{array}\right] \Rightarrow$ مرتبه ۳ است

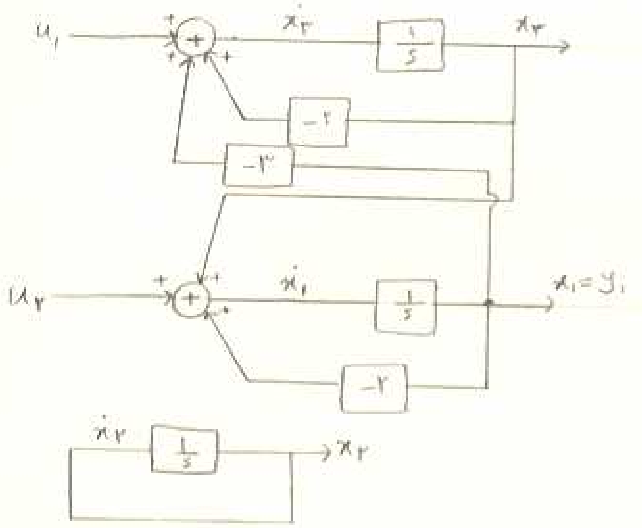
کنترل پذیر است: (از روی نمودار هم مشخص است)

2) $G=[C^T \quad A^TC^T \quad (A^T)^2C^T] \Rightarrow G=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&1&-3\end{bmatrix} \Rightarrow |G|=0$: رویت پذیر نیست

3) در صفحه بعد

حل مسائل کنترل مدرن فصل ۱

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_3 + u_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_3 + u_1 \end{cases} , \quad y = x_1$$



g) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

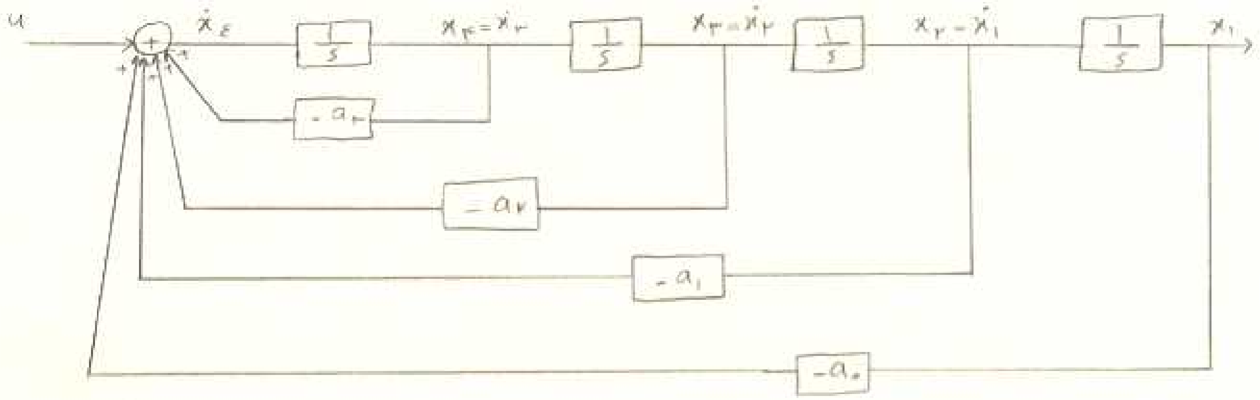
1) $E = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \Rightarrow E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \\ 0 & 1 & -a_3 & -a_2 + a_3^2 \\ 1 & -a_3 & -a_2 + a_3^2 & -a_1 + 2a_2a_3 - a_3^3 \end{bmatrix} \Rightarrow |E| = 1 \neq 0$

کنترل پذیر است.

2) $G = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad (A^T)^3 C^T] \Rightarrow G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |G| \neq 0$

رویت پذیر است.

3) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + u \end{cases} , \quad y = x_1$$



(۱-۱۵)

۱) $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}$ ، (λ_i ها متمایز)

$$E=[B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B] \Longrightarrow E=\begin{bmatrix}b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1^2 b_1 & \lambda_1^3 b_1\\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2 & \lambda_2^3 b_2\\ b_3 & \lambda_3 b_3 & \lambda_3^2 b_3 & \lambda_3^3 b_3\\ b_4 & \lambda_4 b_4 & \lambda_4^2 b_4 & \lambda_4^3 b_4\end{bmatrix} \Rightarrow |E|\neq 0 \Rightarrow$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)\neq 0 \Longrightarrow b_i\neq 0$$ و $i=1,2,3,4$ ،

۲) $$G=[C^T \mid A^TC^T \mid (A^T)^2C^T \mid (A^T)^3C^T] \Rightarrow G=\begin{bmatrix}c_1 & \lambda_1 c_1 & \lambda_1^2 c_1 & \lambda_1^3 c_1\\ c_2 & \lambda_2 c_2 & \lambda_2^2 c_2 & \lambda_2^3 c_2\\ c_3 & \lambda_3 c_3 & \lambda_3^2 c_3 & \lambda_3^3 c_3\\ c_4 & \lambda_4 c_4 & \lambda_4^2 c_4 & \lambda_4^3 c_4\end{bmatrix} \Rightarrow |G|\neq 0 \Longrightarrow$$

$$c_1c_2c_3c_4(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)\neq 0 \Rightarrow c_i\neq 0$$ و $i=1,2,3,4$ ،

۲-۱)

الف) $J=\int_0^{1\,\text{روز}} [v_1(t)-M]^2\,dt$

ب)

$\begin{cases} 0\leqslant h_1\leqslant H_{1max} \\ 0\leqslant h_2\leqslant H_{2max} \end{cases}$ ارتفاع آب باید مثبت و از حدی کمتر باشد

$\begin{cases} 0\leqslant v_1\leqslant V_{1max} \\ 0\leqslant v_2\leqslant V_{2max} \end{cases}$ نمک در دو مخزن باید مثبت و از مقدار مشخصی نمی‌تواند بیشتر باشد.

$\begin{cases} 0\leqslant w_1\leqslant W_{1max} \\ 0\leqslant w_1\leqslant W_{2max} \end{cases}$ ورود آب از نرخ مشخصی نمی‌تواند بیشتر باشد

$\{ 0\leqslant m\leqslant M_{max}$ ورود نمک از نرخ مشخصی نمی‌تواند بیشتر باشد

۲-۲)

$J = H(v_2(t)-N)^2$

۲-۳)

الف) با شرایط مسئله $L_a=0$ و $K_a=1$ $\Longrightarrow \begin{cases} x_1(t)=\dot\theta(t) \\ x_2(t)=i_f(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot x_1 = -\frac{B}{I}x_1+\frac{K_f}{I}x_2 \\ \dot x_2 = \frac{1}{L_f}e(t)-\frac{R_f}{L_f}x_2 \end{cases}$

ب)

$|\lambda_L(t)|\leqslant \lambda_{max}$ بار اعمالی از مقداری کمتر باشد؛

$|e(t)|\leqslant E_{max}$ ولتاژ ورودی تا حدی بالاتر نمی‌رود؛

$|\omega(t)|\leqslant W_{max}$ سرعت از حدی تجاوز نمی‌کند؛

$|i_f(t)|\leqslant I_{fmax}$ جریان از حدی بالاتر نمی‌رود؛

ج) $L_f\neq 0 \Rightarrow J=\int_0^{t_f}\left([K\omega(t)-5]^2+\mu e(t)i(t)\right)dt$

$L_f=0 \Rightarrow e(t)=R_f i(t) \Rightarrow i(t)=\frac{1}{R_f}\times e(t) \Rightarrow J=\int_0^{t_f}\left([K\omega(t)-5]^2+\mu e(t)^2\right)dt$

۲-۴)

الف)

$|u(t)|\leqslant U_{max}$ ورودی سوخت محدود است:

$14.9^\circ\leqslant\theta(30)\leqslant 15.1^\circ \Longrightarrow |\theta(30s)-15^\circ|\leqslant 0.1$: زاویه در ۳۰s، فاصله کمتر از ۰٫۱ تا ۱۵°:

ب) $J=\int_0^{30}|u(t)|\,dt$

۲-۵)

الف)

$|u(t)|\leqslant u_{max}$ ورودی سوخت محدود است.

$|\theta(t_f)-15^\circ|\leqslant 0.1$ زاویه در ۳۰s، فاصله کمتر از ۰٫۱ از ۱۵°:

$|\dot\theta(t)|\leqslant V_{max}$ سرعت از حدی تجاوز نمی‌کند

ب) $J=\int_0^{t_f}dt$

۶-۲)

الف)

جرم m در یک محدوده‌ای تغییر کند: $M_{min} \leqslant x_5(t) \leqslant M_{max}$

دامنه تراست مثبت و محدود است: $0 \leqslant u_1(t) \leqslant T_{max}$

زاویه در صفحه محدود است: $-\pi \leqslant u_2(t) \leqslant \pi$

سرعت در راستای x و y محدود است:
$$\left.\begin{aligned} |x_2(t)| &\leqslant v_{max} \\ |x_4(t)| &\leqslant v_{max} \end{aligned}\right\}$$

ب)

$x_3(t_f) = 3$

$x(t_f)$ حداکثر شود: یعنی $x(t_f)-$ حداقل شود: $J = -x(t_f)$

ج)

$x_1(1/5) = 5$

$x_3(2/5) = 3$

$J = -x_5(2/5)$

۳-۱)

الف)
$$\begin{cases}\Delta t = 0.1\\ t_f = 10^s\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + [1 - x_1^2(t)]x_2(t) + u(t)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{x_1(k+1) - x_1(k)}{\Delta t} = x_2(k)\\ \dfrac{x_2(k+1) - x_2(k)}{\Delta t} = -x_1(k) + [1 - x_1^2(k)]x_2(k) + u(k)\end{cases} \rightarrow$$

معادلات وضعیت:
$$\begin{cases}x_1(k+1) = x_1(k) + 0.1\, x_2(k)\\ x_2(k+1) = x_2(k) - 0.1\, x_1(k) + 0.1(1 - x_1^2(k))\, x_2(k) + 0.1\, u(k)\end{cases}$$

$$J = (x_1(T^*) - 5)^2 + \int_0^{T} [x_2^2(t) + 20(x_1(t) - 5)^2 + u^2(t)]\, dt \rightarrow$$

$$J = (x_1(N) - 5)^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} (x_2(k) + 20(x_1(k) - 5)^2 + u^2(k)) \rightarrow$$

تابعی معیار: $J = (x_1(N) - 5)^2 + 0.1 \sum_{k=0}^{N-1} (x_2(k) + 20(x_1(k) - 5)^2 + u^2(k))$ $N = \dfrac{t_f}{\Delta t} \Rightarrow N = 100$

ب) هیچ تغییر محاسباتی لزومی ندارد

۳-۲)

$$\begin{cases}x(k+1) = -0.5\, x(k) + u(k)\\ J = \sum_{k=0}^{2} |x(k)|\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}-0.2 \leq x(k) \leq 0.2 & : k = 0, 1, 2\\ -0.1 \leq u(k) \leq 0.1 & : k = 0, 1\end{cases}$$

الف) $J = |x(0)| + |x(1)| + \overbrace{|x(2)|}^{J_{22}}$

$J_{12} = |x(1)| + J^*_{22}$

$x(1)$	$u(1)$	$x(2)$	$J_{12} = \lvert x(1)\rvert + \lvert x(2)\rvert$	J^*_{12}	$u^*(1)$
-0.2	-0.1	0	0.2	0.2	-0.1
	0	0.1	0.3		
	0.1	0.2	0.4		
-0.1	-0.1	-0.05	0.15	0.15	-0.1
	0	0.05	0.15		0
	0.1	0.15	0.25		
0	-0.1	-0.1	0.1	0	0
	0	0	0		
	0.1	0.1	0.1		
0.1	-0.1	-0.15	0.25	0.05	0.1
	0	0.05	0.15		
	0.1	-0.05	0.05		
0.2	-0.1	-0.2	0.4	0.2	0.1
	0	-0.1	0.3		
	0.1	0	0.2		

(ادامه در صفحه بعدی)

«حل مسائل کنترل بهینه، فصل ۳»

$x(0)$	$u(0)$	$x(1)$	$J_{02} = J_{01} + J^*_{12} = \lvert x(0) \rvert + J^*_{12}$	J^*_{02}	$u(0)$
	$-0/1$	0	$0/2$		
$-0/2$	0	$0/1$	$0/25$	$0/2$	$-0/1$
	$0/1$	$0/2$	$0/4$		
	$-0/1$	$-0/05$	$0/1 + \frac{0/15-0}{-0/1-0}\cdot(-0/05-0) = 0/175$		
$-0/1$	0	$0/05$	$0/1 + \frac{0/05-0}{0/1-0}(0/05-0) = 0/125$	$0/125$	0
	$0/1$	$0/15$	$0/1+0/05+\frac{0/2-0/05}{0/2-0/1}(0/15-0/1) = 0/225$		
	$-0/1$	$-0/1$	$0/15$		
0	0	0	0	0	0
	$0/1$	$0/1$	$0/05$		
	$-0/1$	$-0/15$	$0/1 + 0/2 + \frac{0/2-0/15}{-0/2+0/1}\cdot(-0/15+0/2) = 0/275$		
$0/1$	0	$-0/05$	$0/1 + \frac{0/15-0}{-0/1-0}(-0/05-0) = 0/175$	$0/125$	$0/1$
	$0/1$	$0/05$	$0/1 + \frac{0/05-0}{0/1-0}(0/05-0) = 0/125$		
	$-0/1$	$-0/2$	$0/3$		
$0/2$	0	$-0/1$	$0/35$	$0/25$	$0/1$
	$0/1$	0	$0/25$		

ب)

$$x(0) = 0/2 \longrightarrow u(0) = 0/1 \longrightarrow x(1) = 0 \Longrightarrow u(1) = 0 \Longrightarrow x(2) = 0$$

$$\begin{cases} x = [0/2 \quad 0 \quad 0] \\ u = [0/1 \quad 0] \end{cases}$$

۳-۳)

چون گفته در نقاط سیاه [illegible] پایانی نداریم:

الف)

$$\begin{cases} x(k+1) = 0/5\, x(k) + u(k) \\ J = \sum_{k=0}^{1} \left(\lvert x(k) \rvert + 5 \lvert u(k) \rvert \right) = \lvert x(0) \rvert + 5 \lvert u(0) \rvert + \lvert x(1) \rvert + 5 \lvert u(1) \rvert + \overset{J_{02}}{0} \end{cases}$$

$x(1)$	$u(1)$	$x(2)$	$J^*_{12} = \lvert x(1) \rvert + \lvert 5u(1) \rvert + J_{22}$
-2	1		7
-1	$0/5$		$3/5$
0	0	0	0
1	$-0/5$		$3/5$
2	-1		7

بقیه جدول در صفحه بعد

$x(0)$	$u(0)$	$x(1)$	$J_{02}=\lvert x(0)\rvert+5\lvert u(0)\rvert+J^*_{12}$	J^*_{02}	$u^*(0)$
-۳	-۰٫۵ ۰٫۵	-۲ -۱	۵٫۵ + ۷ = ۱۲٫۵ ۵٫۵ + ۳٫۵ = ۹	۹	۰٫۵
-۲	-۱ ۰ ۱	-۲ -۱ ۰	۷ + ۷ = ۱۴ ۲ + ۳٫۵ = ۵٫۵ ۷ + ۰ = ۷	۵٫۵	۰
-۱	-۰٫۵ ۰٫۵	-۱ ۰	۳٫۵ + ۳٫۵ = ۷ ۳٫۵ + ۰ = ۳٫۵	۳٫۵	۰٫۵
۰	-۱ ۰ ۱	-۱ ۰ ۱	۵ + ۳٫۵ = ۸٫۵ ۰ + ۰ = ۰ ۵ + ۳٫۵ = ۸٫۵	۰	۰
۱	-۰٫۵ ۰٫۵	۰ ۱	۳٫۵ + ۰ = ۳٫۵ ۳٫۵ + ۳٫۵ = ۷	۳٫۵	-۰٫۵
۲	-۱ ۰ ۱	۰ ۱ ۲	۷ + ۰ = ۷ ۲ + ۳٫۵ = ۵٫۵ ۷ + ۷ = ۱۴	۵٫۵	۰
۳	-۰٫۵ ۰٫۵	۱ ۲	۵٫۵ + ۳٫۵ = ۹ ۵٫۵ + ۷ = ۱۲٫۵	۹	-۰٫۵

ب) x(0) = -۲ ⟶ u(0) = ۰ ⟶ x(1) = -۱ ⟶ u(1) = ۰٫۵ ⟶ x(2) = ۰

۲-۳)

$$\begin{cases} x(k+1)=x(k)-0.4\,x^2(k)+u(k) \\ J=\lvert u(0)\rvert+\lvert u(1)\rvert+\underbrace{4\lvert x(2)\rvert}_{J_{22}} \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x(k)=0,\ 0.5,\ 1 \\ u(k)=-0.4,\ -0.2,\ 0,\ 0.2,\ 0.4 \end{cases}$$

الف)

$x(1)$	$u(1)$	$x(2)$	$J_{12}=\lvert u(1)\rvert+J_{22}$	J^*_{12}	$u^*(1)$
۰	-۰٫۴ -۰٫۲ ۰ ۰٫۲ ۰٫۴	— — ۰ ۰٫۲ ۰٫۴	— — ۰ ۱ ۲	۰	۰
۰٫۵	-۰٫۴ -۰٫۲ ۰ ۰٫۲ ۰٫۴	۰ ۰٫۲ ۰٫۴ ۰٫۶ ۰٫۸	۰٫۴ ۱ ۱٫۶ ۲٫۶ ۳٫۶	۰٫۴	-۰٫۴
۱	-۰٫۴ -۰٫۲ ۰ ۰٫۲ ۰٫۴	۰٫۲ ۰٫۴ ۰٫۶ ۰٫۸ ۱	۱٫۲ ۱٫۸ ۲٫۴ ۳٫۴ ۴٫۴	-۰٫۴	-۰٫۴

$x(0)$	$u(0)$	$x(1)$	$J_{02} = \lvert u(0)\rvert + J^*_{12}$	J^*_{02}	$u^*(0)$
0	-0.4	—	—	0	0
	-0.2	—	—		
	0	0	$0+0=0$		
	0.2	0.2	$0.2+\left(0+\frac{0.4-0}{0.5-0}(0.2-0)\right)=0.36$		
	0.4	0.4	$0.4+\left(0+\frac{0.4-0}{0.5-0}(0.4-0)\right)=0.72$		
0.5	-0.4	0	$0.4+0=0.4$	0.32	0
	-0.2	0.2	$0.2+\left(0+\frac{0.4-0}{0.5-0}(0.2-0)\right)=0.36$		
	0	0.4	$0+\left(0+\frac{0.4-0}{0.5-0}(0.4-0)\right)=0.32$		
	0.2	0.6	$0.2+\left(0.4+\frac{1.2-0.4}{1-0.5}(0.6-0.5)\right)=0.36$		
	0.4	0.8	$0.4+\left(0.4+\frac{1.2-0.4}{1-0.5}(0.8-0.5)\right)=0.88$		
1	-0.4	0.2	$0.4+\left(0+\frac{0.4-0}{0.5-0}(0.2-0)\right)=0.56$	0.52	-0.2
	-0.2	0.4	$0.2+\left(0+\frac{0.4-0}{0.5-0}(0.4-0)\right)=0.52$		
	0	0.6	$0+\left(0.4+\frac{1.2-0.4}{1-0.5}(0.6-0.5)\right)=0.56$		
	0.2	0.8	$0.2+\left(0.4+\frac{1.2-0.4}{1-0.5}(0.8-0.5)\right)=0.28$		
	0.4	1	$0.4+1.2=1.6$		

ب) $x(0)=1 \longrightarrow u(0)=-0.2 \longrightarrow x(1)=0.4 \longrightarrow u(1)=-0.336 \longrightarrow x(2)=0$

۳-۵)

$x(k+1)=0.75\,x(k)+u(k)$ و $\begin{cases} 0\le x(2)\le 2 \\ J=u^2(0)+u^2(1)\end{cases}$ و $\begin{cases} x(k)=0,2,4,6 \;:\; k=0,1,2 \\ u(k)=-1,-0.5,0,0.5,1 \;:\; k=0,1\end{cases}$

الف)

$x(1)$	$u(1)$	$x(2)$	$J_{12}=u^2(1)$	J^*_{12}	$u^*(1)$
0	-1	-1	—	0	0
	-0.5	-0.5	—		
	0	0	0		
	0.5	0.5	0.25		
	1	1	1		
2	-1	0.5	1	0	0
	-0.5	1	0.25		
	0	1.5	0		
	0.5	2	0.25		
	1	—	—		
4	-1	2	1	1	-1
	-0.5	—	—		
	0	—	—		
	0.5	—	—		
	1	—	—		
6	-1	—	—	—	—
	-0.5	—	—		
	0	—	—		
	0.5	—	—		
	1	—	—		

$x(0)$	$u(0)$	$x(1)$	$J_{02} = u^2(0) + J^*_{12}$	J^*_{02}	$u^*(0)$
۰	-۱	—	—	۰	۰
	-٫۵	—	—		
	۰	۰	۰+۰=۰		
	٫۵	٫۵	٫۲۵+۰=٫۲۵		
	۱	۱	۱+۰=۱		
۲	-۱	۱	۱+۰=۱	۰	۰
	-٫۵	۱٫۵	٫۲۵+۰=٫۲۵		
	۰		۰+۰=۰		
	٫۵	۲	٫۲۵+۰=٫۲۵		
	۱	۲٫۵	۱+٫۲۵=۱٫۲۵		
۳	-۱	۲	۱+۰=۱	٫۵	-٫۵
	-٫۵	۲٫۵	٫۲۵+٫۲۵=٫۵		
	۰	۳	۰+٫۵=٫۵		
	٫۵	۳٫۵	٫۲۵+٫۷۵=۱		
	۱	۴	۱+۱=۲		
۴	-۱	۳٫۵	۱+٫۷۵=۱٫۷۵	۱٫۲۵	-٫۵
	-٫۵	۴	٫۲۵+۱=۱٫۲۵		
	۰	۴٫۵	—		
	٫۵	۵	—		
	۱	۵٫۵	—		

ب) $x(0)=4 \longrightarrow u^*(0)=-0.5 \longrightarrow x(1)=3 \longrightarrow u^*(1)=-1 \longrightarrow x(2)=2$

۳-۴) $x(K) =$ ۰ و ٫۱ و ٫۲ و ٫۳ و ٫۴ : $K =$ ۰ و ۱ و ۲

$u(K) =$ -٫۲ و -٫۱ و ۰ و ٫۱ و ٫۲ : $K =$ ۰ و ۱

و

$$\begin{cases} x(K+1) = x(K) + u(K) \\ J = |u(0)| + |u(1)| + 2|x(1) - 0.1| + \overbrace{2|x(2) - 0.4|}^{J_{22}} \end{cases}$$

الف) حل در صفحه بعد:

حل مسائل کنترل بهینه «فصل ۳»

$x(1)$	$u(1)$	$x(2)$	$J_{12} = \lvert u(1)\rvert + 2\lvert x(1) - 0.1\rvert + J^*_{22}$	J^*_{12}	$u^*(1)$
	-۰/۲	—	—		
	-۰/۱	—	—		
۰	۰	۰	۰ + ۲|۰ - ۰/۱| + ۲|۰ - ۰/۴| = ۱	۰/۸	۰/۲
	۰/۱	۰/۱	۰/۱ + ۲|۰ - ۰/۱| + ۲|۰/۱ - ۰/۴| = ۰/۹		
	۰/۲	۰/۲	۰/۲ + ۲|۰ - ۰/۱| + ۲|۰/۲ - ۰/۴| = ۰/۸		
	-۰/۲	—	—		
	-۰/۱	۰	۰/۱ + ۲|۰/۱ - ۰/۱| + ۲|۰ - ۰/۴| = ۰/۹		
۰/۱	۰	۰/۱	۰ + ۲|۰/۱ - ۰/۱| + ۲|۰/۱ - ۰/۴| = ۰/۶	۰/۴	۰/۲
	۰/۱	۰/۲	۰/۱ + ۲|۰/۱ - ۰/۱| + ۲|۰/۲ - ۰/۴| = ۰/۵		
	۰/۲	۰/۳	۰/۲ + ۲|۰/۱ - ۰/۱| + ۲|۰/۳ - ۰/۴| = ۰/۴		
	-۰/۲	۰	۰/۲ + ۲|۰/۲ - ۰/۱| + ۲|۰ - ۰/۴| = ۱/۲		
	-۰/۱	۰/۱	۰/۱ + ۲|۰/۲ - ۰/۱| + ۲|۰/۱ - ۰/۴| = ۰/۹		
۰/۲	۰	۰/۲	۰ + ۲|۰/۲ - ۰/۱| + ۲|۰/۲ - ۰/۴| = ۰/۶	۰/۴	۰/۲
	۰/۱	۰/۳	۰/۱ + ۲|۰/۲ - ۰/۱| + ۲|۰/۳ - ۰/۴| = ۰/۵		
	۰/۲	۰/۴	۰/۲ + ۲|۰/۲ - ۰/۱| + ۲|۰/۴ - ۰/۴| = ۰/۴		
	-۰/۲	۰/۱	۰/۲ + ۲|۰/۳ - ۰/۱| + ۲|۰/۱ - ۰/۴| = ۱/۲		
	-۰/۱	۰/۲	۰/۱ + ۲|۰/۳ - ۰/۱| + ۲|۰/۲ - ۰/۴| = ۰/۹		
۰/۳	۰	۰/۳	۰ + ۲|۰/۳ - ۰/۱| + ۲|۰/۳ - ۰/۴| = ۰/۶	۰/۵	۰/۱
	۰/۱	۰/۴	۰/۱ + ۲|۰/۳ - ۰/۱| + ۲|۰/۴ - ۰/۴| = ۰/۵		
	۰/۲	—	—		
	-۰/۲	۰/۲	۰/۲ + ۲|۰/۴ - ۰/۱| + ۲|۰/۲ - ۰/۴| = ۱/۲		
	-۰/۱	۰/۳	۰/۱ + ۲|۰/۴ - ۰/۱| + ۲|۰/۳ - ۰/۴| = ۰/۹		
۰/۴	۰	۰/۴	۰ + ۲|۰/۴ - ۰/۱| + ۲|۰/۴ - ۰/۴| = ۰/۶	۰/۶	۰/۴
	۰/۱	—	—		
	۰/۲	—	—		

$x(0)$	$u(0)$	$x(1)$	$J_{02} = \|u(0)\| + J^*_{12}$	J^*_{02}	$u^*(0)$
0	-0.2	—	—	0.5	0.1
	-0.1	—	—		
	0	0	0 + 0.8 = 0.8		
	0.1	0.1	0.1 + 0.4 = 0.5		
	0.2	0.2	0.2 + 0.4 = 0.6		
0.1	-0.2	—	—	0.4	0
	-0.1	0	0.1 + 0.8 = 0.9		
	0	0.1	0 + 0.4 = 0.4		
	0.1	0.2	0.1 + 0.4 = 0.5		
	0.2	0.3	0.2 + 0.3 = 0.5		
0.2	-0.2	0	0.2 + 0.8 = 1	0.4	0
	-0.1	0.1	0.1 + 0.4 = 0.5		
	0	0.2	0 + 0.4 = 0.4		
	0.1	0.3	0.1 + 0.5 = 0.6		
	0.2	0.4	0.2 + 0.6 = 0.8		
0.3	-0.2	0.1	0.4 + 0.4 = 0.8	0.3	0
	-0.1	0.2	0.1 + 0.4 = 0.5		
	0	0.3	0 + 0.3 = 0.3		
	0.1	0.4	0.1 + 0.6 = 0.7		
	0.2	—	—		
0.4	-0.2	0.2	0.2 + 0.4 = 0.6	0.4	-0.1
	-0.1	0.3	0.1 + 0.3 = 0.4		
	0	0.4	0 + 0.6 = 0.6		
	0.1	—	—		
	0.2	—	—		

ب) $x(0) = 0.2 \longrightarrow u(0) = 0 \longrightarrow x(1) = 0.2 \longrightarrow u(1) = 0.2 \longrightarrow x(2) = 0.4$

(۳-۷

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$K = \min\left(\frac{q_1}{2} x_1^2(t) + \frac{q_2}{2} x_2^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) + \begin{bmatrix} J_{x_1}^* & J_{x_2}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{bmatrix}\right) \Rightarrow$$

$$K = \min\left(\frac{1}{2} u^2(t) + u(t) J_{x_2}^* + \left(\frac{q_1}{2} x_1^2(t) + \frac{q_2}{2} x_2^2(t) + x_2(t) J_{x_1}^* - x_1(t) J_{x_2}^* + x_2(t) J_{x_2}^*\right)\right)$$

$$\text{مشتق} = 0 \Rightarrow u(t) + J_{x_2}^* = 0 \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} -1 & J_{x_2}^* > 1 \\ 1 & J_{x_2}^* < -1 \\ -J_{x_2}^* & |J_{x_2}^*| \leq 1 \end{cases}$$

(۳-۸

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + u(t)$$

$$J = \frac{1}{2} x^2(T) + \int_0^{0.2} \left(\frac{1}{4} x^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t)\right) dt$$

$$H = \frac{1}{4} x^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) + J_x^* (-10x(t) + u(t)) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(t) + J_x^* = 0 \Rightarrow u^*(t) = -J_x^*(x) \Rightarrow$$

در معادله جا میگذاریم:

$$J_t^* + \frac{1}{4} x^2(t) + \frac{1}{2} J_x^{*2} + J_x^* (-10x(t)) - J_x^{*2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(J_x^*)^2 + 10x(t) J_x^* - J_t^* - \frac{1}{4} x^2(t) = 0 \\ J^*(x(T), T) = \frac{1}{2} x^2(T) \\ J^*(x(t), t) = \frac{1}{2} K(t) x^2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u^*(t) = -K(t) x(t) \\ K(T) = 1 \\ \frac{1}{2} K^2(t) x^2(t) + 10x^2(t) K(t) - \frac{1}{2} \dot{K}(t) x^2(t) - \frac{1}{4} x^2(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$K^2(t) + 20K(t) - \dot{K}(t) - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{K}(t) = -\frac{1}{2} + K^2(t) + 20K(t) \\ K(0.2) = 1 \end{cases} \rightarrow K(t) = 0.5(-20 + 20\tanh(0.2((96.8-78.51)\cdot 0.5 t)))$$

و از رابطه بالا داریم $\lim_{t\to\infty} u(t) = 2.25x(t)$ و سیستم بصورت $\dot{x}(t) = +10.25x(t)$ است

(۳-۹ در اثبات مسأله در صورتیکه Q و A و B و R به K وابسته باشند معادلات همان معادلات است و روش اثبات همان است. فقط برای $u^*(N-1)$ داریم:

$$u^*(N-1) = -\left[R(N-1) + B^T(N-1) P(0) B(N-1)\right]^{-1} B^T(N-1) P(0) A(N-1) x(N-1) \triangleq F(N-1) x(N-1)$$

و با استفاده به روابط (۳-۱۰-۱۶) و (۳-۱۰-۱۷) و (۳-۱۰-۱۹) و (۳-۱۰-۲۰) می رسیم.

۳.۱۰)

الف)
$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ J = \frac{1}{2} x(N) H x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[[x(k) - r] Q [x(k) - r] + u(k) R u(k) \right] \end{cases}$$

① $J_{N,N}(x(N)) = \frac{1}{2} x(N) H x(N) \rightarrow$
$$J^*_{N,N}(x(N)) = P(0) x^2(N), \quad P(0) = \frac{H}{2}$$

② $J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) = Q(x(N-1)-r)^2 + Ru(N-1)^2 + J^*_{N,N}(x(N)) \Longrightarrow \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u(N-1)} = 0 \longrightarrow$

$2Ru(N-1) + 2P(0)(Ax(N-1) + Bu(N-1))B = 0 \longrightarrow$
$$u(N-1) = F(N-1)x(N-1), \quad F(N-1) = -\frac{P(0)AB}{R + P(0)B^2}$$

$$J^*_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) = P(1)x^2(N-1) + 2q(1)x(N-1) + s(1)$$
$$P(1) = Q + RF(N-1)^2 + P(0)(A + BF(N-1))^2$$
$$q(1) = -rQ$$
$$s(1) = Qr^2$$

③ $J_{N-2,N}(x(N-2), u(N-2)) = Q(x(N-2)-r)^2 + Ru(N-2)^2 + J^*_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) \longrightarrow \frac{\partial J_{N-2,N}}{\partial u(N-2)} = 0 \longrightarrow$

$2Ru(N-2) + 2P(1)(Ax(N-2) + Bu(N-2))B + 2q(1)B = 0 \longrightarrow$
$$u(N-2) = F(N-2)x(N-1), \quad F(N-2) = -\frac{P(1)AB + q(1)B}{R + P(1)B^2}$$

$$J^*_{N-2,N}(x(N-2), u(N-2)) = P(2)x^2(N-2) + 2q(2)x(N-2) + s$$
$$P(1) = Q + RF(N-2)^2 + P(1)(A + BF(N-2))^2$$
$$q(2) = -rQ + q(1)(A + BF(N-2))$$
$$s(2) = s(1) + Qr^2$$

پس در حالت کلی داریم:

$$\begin{cases} P(0) = \frac{H}{2}, \quad q(0) = 0, \quad s(0) = 0 \\ u(N-K) = F(N-K)x(N-K) \\ F(N-K) = -\frac{P(K-1)AB + q(K-1)B}{R + P(K-1)B^2} \\ P(K) = Q + RF(N-K)^2 + P(K-1)(A + BF(N-K))^2 \\ q(K) = -rQ + q(K-1)(A + BF(N-K)) \\ s(K) = s(K-1) + Qr^2 \end{cases}$$

ب) حل در صفحه بعد:

«حل مسائل کنترل بهینه «فصل ۳»»

$p(0)=\frac{H}{2}\,,\ q(0)=0\,,\ s(0)=0$ طبق رابطه صفحه قبل

$K=1:$

$$\begin{cases} u(2)=F(2)x(2) \\ F(2)=-\dfrac{p(0)AB+0}{R+p(0)B^2} \\ p(1)=Q+RF(2)+p(0)(A+BF(2))^2 \\ q(1)=-r(2)Q \\ s(1)=0+r(2)^2Q \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(2)=-\dfrac{p(0)AB}{R+p(0)B^2}x(2) \\ p(1)=Q-\dfrac{Rp(0)AB}{R+p(0)B^2}+p(0)\left(A-\dfrac{p(0)AB^2}{R+p(0)B^2}\right)^2 \\ q(1)=-r(2)Q \\ s(1)=r(2)^2Q \end{cases}$$

$$K=2: \begin{cases} u(1)=F(1)x(1) \\ F(1)=-\dfrac{p(1)AB+q(1)B}{R+p(1)B^2} \\ p(2)=Q+RF(1)+p(1)(A+BF(1))^2 \\ q(2)=-r(1)Q+q(1) \\ s(2)=r(1)^2Q \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(1)=-\dfrac{p(1)AB+q(1)B}{R+p(1)B^2}x(1) \\ p(2)=Q-\dfrac{Rp(1)AB+Rq(1)B}{R+p(1)B^2}+p(1)\left(A-\dfrac{p(1)AB^2+q(1)B^2}{R+p(1)B^2}\right)^2 \\ q(2)=-r(1)Q+q(1) \\ s(2)=r(1)^2Q \end{cases}$$

$$K=3: \begin{cases} u(0)=F(0)x(0) \\ F(0)=-\dfrac{p(2)AB+q(2)B}{R+p(2)B^2} \\ p(3)=Q+RF(0)+p(2)(A+BF(0))^2 \\ q(3)=-r(0)Q+q(2) \\ s(3)=r(0)^2Q \end{cases} \Longrightarrow \left\{ u(0)=-\dfrac{p(2)AB+q(2)B}{R+p(2)B^2}x(0) \right.$$

(۳-۱۱

$$\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\,dt \leq M \Longrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) \leq M$$

چون اعمال رابطه بالا بعد از بدست آوردن تمام ورودیها است، نمی توان آنرا در برنامه ریزی پویا حل کرد.

(۳-۱۲

الف) $c_{ij}^{(k+1)}=\min\limits_{l,\ l\neq i}\left(c_{il}^{(0)}+c_{lj}^{(k)}\right)$

این بدین معناست که می نیم طول مسیر از i به j با حداکثر k+1 نقطه برابر است با کمترین مسیر بین مسیرهایی که از i به گره ای و از آن گره به j برویم با k نقطه

ب) $c_{ij}^{(1)}=\min\limits_{l,\ l\neq i}\left(c_{il}^{(0)}+c_{lj}^{(0)}\right) \Rightarrow C_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$c_{ij}^{(2)}=\min\limits_{l,\ l\neq i}\left\{c_{il}^{(0)}+c_{lj}^{(1)}\right\} \Rightarrow C_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

ج) چون مسیر بهینه بین دو گره که ۴ گره بین آنها باشد وجود ندارد. چون تعداد گره‌ها ۵ است.

د) $c_{ij}^{(3)} \le c_{ij}^{(2)} \le c_{ij}^{(1)} \le c_{ij}^{(0)}$: واضح است که چون در هر مرحله مسیر بهینه‌تری را می‌یابیم

هـ) اگر ماتریس C متقارن نمی‌شود و باید همه را حساب کرد.

۳-۱۲)

(۳-۱۹

$x(0)=1.5 \longrightarrow u^*(0)=-0.38 \longrightarrow x(1)=1.12 \longrightarrow u^*(1)=-0.38 \longrightarrow x(2)=0.74$, $\lambda=2$

$x(0)=1.5 \longrightarrow u^*(0)=-0.24 \longrightarrow x(1)=1.26 \longrightarrow u^*(1)=-0.26 \longrightarrow x(2)=1$: $\lambda=4$

$x(0)=1.5 \longrightarrow u^*(0)=-0.6 \longrightarrow x(1)=0.9 \longrightarrow u^*(2)=-0.6 \longrightarrow x(2)=0.3$ $\lambda=0.5$

الف) $\lambda\uparrow \Longrightarrow u^*(0)\uparrow \Longrightarrow x(1)\uparrow \Longrightarrow u^*(1)\uparrow \Longrightarrow x(2)\uparrow$

$\lambda\uparrow \Longrightarrow u^{*2}(0)\downarrow \Longrightarrow x(2)\uparrow \Longrightarrow u^{*2}(1)\downarrow \Longrightarrow x(2)\uparrow$

وقتی λ زیاد می شود، باید حاصل $u^{*2}(k)$ کمتر شود و این اتفاق افتاده است.

ب) $\lambda\uparrow \Rightarrow x(2)\uparrow$

وقتی λ زیاد می شود تأثیر کنترل مهم است و کنترل زیاد می شود. در نتیجه $x(2)$ بالاتر می رود.

(۳-۲۰

الف) $x(0)=1.5 \longrightarrow u^*(0)=-0.38 \longrightarrow x(1)=1.12 \longrightarrow u^*(1)=-0.38 \longrightarrow x(2)=0.74$: $a=0$

$x(0)=1.5 \longrightarrow u^*(0)=-0.1 \longrightarrow x(1)=0.8 \longrightarrow u^*(1)=-0.16 \longrightarrow x(2)=0.32$: $a=-0.4$

$J_{02}=1.1252$: $a=0$

$J_{02}=0.1736$: $a=-0.4$

چون $a=-0.4$ شده است پس سیستم کندتر میرا می شود. پس به کنترل بالاتری نیاز داریم. پس جریمه کمتری می پردازیم (به صفر نزدیکتریم) و هزینه کمتر می شود.

ب)

انتظار می رود که کنترل در جهت منفی بزرگتر شود و هزینه بیشتر شود. با محاسبات داریم:

$x(0)=1.5 \longrightarrow u^*(0)=-0.8 \longrightarrow x(1)=1.28 \longrightarrow u^*(1)=-0.6 \longrightarrow x(2)=1.192$

(۳-۲۱

الف) $x(0)=2.5 \longrightarrow u^*(0)=-0.5 \longrightarrow x(1)=2 \longrightarrow u^*(1)=-0.5 \longrightarrow x(2)=1.5 \longrightarrow u^*(2)=-0.5 \rightarrow x(3)=1$

ب) $x(0)=2.5 \longrightarrow u^*(0)=-0.5 \rightarrow$ ~~$x(1)=2$~~ $x(1)=2.1 \longrightarrow u^*(1)=-0.52 \longrightarrow x(2)=1.58 \longrightarrow u^*(2)=-0.52 \rightarrow x(3)=1.06$

(۳-۲۲

الف) در جدولهای (۳-۱۴ الف و ۳-۱۴ ب اگر نگاه کنیم می بینیم که ۶ ستون اول با هم برابرند و این اثباتی بر این حرف است.

ب) غیر درست نیست. چون از انتها مسأله حل می شود و با تغییر n از ۲ به ۳، زمان در مرحله n و n-1 و ... در دو سیستم فرق می کند و دیگر آن جمله درست نیست.

(۳-۲۳

گسسته سازی:

$\dot{x}(t)=ax(t)+bu(t) \Longrightarrow x(k+1)=(I+a\Delta t)x(k)+b\Delta t\,u(t) \Rightarrow x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$

$J=10x_1^2(T)+\frac{1}{2}\int_0^T[x_1^2(t)+2x_2^2(t)+u^2(t)]dt \Longrightarrow J=\frac{1}{2}x^T(T)\begin{pmatrix}20 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}x(T)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x^T(t)\begin{pmatrix}\Delta t & 0\\ 0 & 2\Delta t\end{pmatrix}x(t)+u^T(t)\times\Delta t\times u(t)\right)$

الف) در صفحه بعد

۴-۱ چون تابع در نقطه داخلی q^* دارای می‌نیمم است، پس

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial q_1}=0\\ \frac{\partial f}{\partial q_2}=0\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial q_n}=0\end{cases} \Rightarrow df=\frac{\partial f}{\partial q_1}\Delta q_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}\Delta q_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial q_n}\Delta q_n=0 \Rightarrow df=0$$

۴-۲ فرض

$$\begin{cases} h(t)\ \text{و}\ \delta x(t)\ \text{پیوسته}\\ \delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0\end{cases} \quad \text{و}\ \int_{t_0}^{t_f} h(t)\,\delta x(t)\,dt=0 \Longrightarrow h(t)=0$$

اثبات: فرض کنیم $h(t)\neq 0$ و فرض می‌کنیم که دارای k صفر در نقاط t_1 و t_2 و ... و t_k است. $\delta x(t)$ را بصورت روبرو تعریف می‌کنیم. با این فرض مشخص است که $h(t)\delta x(t)\geq 0$ و در بعضی نقاط مخالف صفر است. پس $\int_{t_0}^{t_f} h(t)\,\delta x(t)\,dt>0$ و فرض غلط می‌شود.

$$\begin{cases}\delta x(t_0)=0\\ \delta x(t_f)=0\\ \delta x(t)=\begin{cases}+ & h(t)>0,\ t\in(t_i,t_{i+1})\\ - & h(t)<0,\ t\in(t_i,t_{i+1})\\ 0 & h(t)=0\end{cases}\end{cases}$$

۴-۳ الف) $f(t)=4t^3+\frac{5}{t}\ :\ t>0$

$$\Delta f(t,\Delta t)=f(t+\Delta t)-f(t)=\left(4(t+\Delta t)^3+\frac{5}{t+\Delta t}\right)-\left(4t^3+\frac{5}{t}\right)=\left(12t^2-\frac{5}{t}\right)\Delta t+\underbrace{\left(12t+\Delta t+\frac{5}{t^2+\Delta t}\right)\Delta t}_{g(t,\Delta t)}\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} g(t,\Delta t)=0 \Longrightarrow df=\left(12t^2-\frac{5}{t}\right)\Delta t$$

ب) $f(q_1,q_2)=5q_1^2+6q_1q_2+2q_2^2$

$$\Delta f(q_1,q_2,\Delta q_1,\Delta q_2)=\left(5(q_1+\Delta q_1)^2+6(q_1+\Delta q_1)(q_2+\Delta q_2)+2(q_2+\Delta q_2)^2\right)-\left(5q_1^2+6q_1q_2+2q_2^2\right)\Rightarrow$$

$$\Delta f(q_1,q_2,\Delta q_1,\Delta q_2)=(10q_1+6q_2)\Delta q_1+(6q_1+4q_2)\Delta q_2+\underbrace{\frac{5\Delta q_1^2+6\Delta q_1\Delta q_2+2\Delta q_2^2}{\sqrt{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2}}}_{g(q_1,q_2,\Delta q_1,\Delta q_2)}\sqrt{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2}$$

(چون مین صورت منفی است پس عبارت مثبت است)

$$0\leq g(q_1,q_2,\Delta q_1,\Delta q_2)\leq\frac{5\Delta q_1^2+6\times\frac{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2}{2}+2\Delta q_2^2}{\sqrt{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2}}=\frac{8\Delta q_1^2+5\Delta q_2^2}{\sqrt{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2}}\leq\frac{8(\Delta q_1^2+\Delta q_2^2)}{\sqrt{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2}}\leq 8\sqrt{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2}$$

$$0\leq\lim_{\|\Delta\|\to 0} g(q_1,q_2,\Delta q_1,\Delta q_2)\leq 8\times 0 \overset{\text{ساندویچ}}{\Longleftrightarrow} \lim g(q_1,q_2,\Delta q_1,\Delta q_2)=0 \Longrightarrow$$

$$df=(10q_1+6q_2)\Delta q_1+(6q_1+4q_2)\Delta q_2$$

ج) $f(q_1,q_2,q_3)=q_1^2+q_2^2+5q_1q_2q_3+2q_1q_2+3q_3$

$$\Delta f(q_1,q_2,q_3,\Delta q_1,\Delta q_2,\Delta q_3)=(q_1+\Delta q_1)^2+(q_2+\Delta q_2)^2+5(q_1+\Delta q_1)(q_2+\Delta q_2)(q_3+\Delta q_3)+2(q_1+\Delta q_1)(q_2+\Delta q_2)$$
$$+3(q_3+\Delta q_3)-(q_1^2+q_2^2+5q_1q_2q_3+2q_1q_2+3q_3)$$

$$\Delta f=(2q_1+5q_2q_3+2q_2)\Delta q_1+(2q_2+5q_1q_3+2q_1)\Delta q_2+(5q_1q_2+3)\Delta q_3+g(q,\Delta q)\sqrt{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2+\Delta q_3^2}$$

$$g(q,\Delta q)=\frac{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2+5q_3\Delta q_1\Delta q_2+5q_2\Delta q_1\Delta q_3+5q_1\Delta q_2\Delta q_3+\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3+2\Delta q_1\Delta q_2}{\sqrt{\Delta q_1^2+\Delta q_2^2+\Delta q_3^2}}$$

چون مرتبه صورت از ۲ است و مخرج از درجه ۱، پس $\lim_{\|\Delta q\|\to 0} g(q,\Delta q)=0$. پس داریم:

$$df=(2q_1+5q_2q_3+2q_2)\Delta q_1+(2q_2+5q_1q_3+2q_1)\Delta q_2+(5q_1q_2+3)\Delta q_3$$

۴-۴)

a) $\partial J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial g}{\partial x}\partial x(t)+\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\partial \dot{x}(t)\right]dt \Rightarrow \partial J=\int_{t_0}^{t_f}[(3x^2(t)-2x(t))\partial x(t)-x^2(t)\partial \dot{x}(t)]dt$

b) $\partial J=\int_{t_0}^{t_f}[(2x_1(t)+x_2(t))\partial x_1(t)+(x_1(t)+2x_2(t))\partial x_2(t)+2\dot{x}_2(t)\partial \dot{x}_1(t)+2\dot{x}_1(t)\partial \dot{x}_2(t)]dt$

c) $\partial J=\int_{t_0}^{t_f}e^{x(t)}\partial x(t)\,dt$

۴-۵)

۴-۶)

$J_d=\sum_{K=0}^{N-1}g(x(K),\dot{x}(K),K)\Delta t$ ، $x(K)=x(t_0+K\Delta t)$ ، $\dot{x}(K)=\frac{x(K+1)-x(K)}{\Delta t}$

$$\frac{\partial J_d}{\partial x(1)}=0\Longrightarrow \Delta t\left(\frac{\partial g}{\partial x(1)}+\frac{\partial g}{\partial \dot{x}(1)}\frac{d\dot{x}(1)}{dx(1)}\right)=0\Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x(1)}-\frac{1}{\Delta t}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}(1)}=0\Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x(1)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}(1)}\right)=0$$

همینطور برای همه $x(i)$ها داریم $\frac{\partial g}{\partial x(i)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}(i)}\right)=0$، پس $\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0$.

۴-۷)

a) $f(t)=0.333t^3+1.5t^2+2t+5 \Rightarrow f'(t)=0 \Rightarrow t^2+3t+2=0 \Rightarrow \begin{cases}t_1^*=-1\\ t_2^*=-2\end{cases}$

b) $f(t)=te^{-2t},\ t\geq 0 \Rightarrow f'(t)=0 \Rightarrow e^{-2t}-2te^{-2t}=0 \Rightarrow t^*=0.5$

c) $f(q)=q_1^2+2q_2^2+9q_1-q_2+q_1q_2+22 \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial q_1}=0 \Rightarrow 2q_1+9+q_2=0\\ \frac{\partial f}{\partial q_2}=0 \Rightarrow 4q_2-1+q_1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2q_1+q_2=-9\\ 4q_2+q_1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}q_1^*=-\frac{37}{7}\\ q_2^*=\frac{11}{7}\end{cases}$

۴-۸)

a) $J(x)=\int_0^1 [x^2(t)+\dot{x}^2(t)]dt \quad , x(0)=0 , x(1)=1$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \Rightarrow 2x(t)-2\ddot{x}(t)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t} \\ x(0)=0 , x(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)=\frac{e^{-t}-e^{t}}{e^{-1}-e}$$

b) $J(x)=\int_0^2 [x^2(t)+2\dot{x}(t)x(t)+\dot{x}^2(t)]dt \quad , x(0)=1 , x(2)=-3$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \Rightarrow 2x(t)+2\dot{x}(t)-2\dot{x}(t)-2\ddot{x}(t)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t} \\ x(0)=1 , x(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t} \\ c_1=\dfrac{-3-e^{-2}}{e^{2}-e^{-2}} \\ c_2=\dfrac{e^{2}+3}{e^{2}-e^{-2}} \end{cases}$$

c) $J(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dot{x}_1^2(t)+\dot{x}_2^2(t)+2x_1(t)x_2(t)]dt \quad , \begin{cases} x_1(0)=0 , & x_1(\frac{\pi}{2})=1 \\ x_2(0)=0 , & x_2(\frac{\pi}{2})=1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}_1}\right)=0 \Rightarrow 2x_2(t)-2\ddot{x}_1(t)=0 \Rightarrow \ddot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}_2}\right)=0 \Rightarrow 2x_1(t)-2\ddot{x}_2(t)=0 \Rightarrow \ddot{x}_2(t)=x_1(t) \\ x_1(0)=x_2(0)=0 , x_1(\frac{\pi}{2})=x_2(\frac{\pi}{2})=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1(t)=x_2(t)=\frac{\sinh(t)}{\sinh(\frac{\pi}{2})}$$

۴-۹)

$J(x)=\int_0^1 [\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)+3x(t)\dot{x}(t)+2x^2(t)+4x(t)]dt \quad , x(0)=1 , x(1)=4$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \Rightarrow 3\dot{x}(t)+4x(t)+4-\ddot{x}(t)-3\dot{x}(t)=0 \Rightarrow \ddot{x}(t)-4x(t)=4 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-1 \\ x(0)=1 , x(1)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}-1 \\ c_2=\dfrac{5-2e^{2}}{e^{-2}-e^{2}} \\ c_1=2-c_2 \end{cases}$$

۴-۱۰)

a) $J(x)=\int_0^1 [x^2(t)+\dot{x}^2(t)]dt \quad , x(0)=1 , x(1)$ آزاد

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \Rightarrow 2x(t)-2\ddot{x}(t)=0 \Rightarrow \ddot{x}(t)-x(t)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t} \\ x(1)\ \text{آزاد} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t=1}=0 \Rightarrow 2\dot{x}(1)=0 \Rightarrow \dot{x}(1)=0 \\ x(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)=\frac{e^{1-t}+e^{t-1}}{e+e^{-1}}$$

b) $J(x)=\int_0^1 [\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)+x(t)\dot{x}(t)+x(t)]dt \quad , x(0)=\frac{1}{2} , x(1)$ آزاد

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \Rightarrow \dot{x}(t)+1-\ddot{x}(t)-\dot{x}(t)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \ddot{x}(t)=1 \Rightarrow x(t)=c_1t+c_2 \\ x(1)\ \text{آزاد} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t=1}=0 \Rightarrow \dot{x}(1)+x(1)=0 \\ x(0)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)=-t+\frac{1}{2}$$

c) $J(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dot{x}_1^2(t)+\dot{x}_2^2(t)+2x_1(t)x_2(t)]dt \quad , \begin{cases} x_1(0)=0 , & x_1(\frac{\pi}{2})=\text{آزاد} \\ x_2(0)=0 , & x_2(\frac{\pi}{2})=1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}_1}\right)=0 \Rightarrow 2x_2(t)-2\ddot{x}_1(t)=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}_2}\right)=0 \Rightarrow 2x_1(t)-2\ddot{x}_2(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1(t)=c_1sh(t)+c_2ch(t) \\ x_2(t)=c_3sh(t)+c_4ch(t) \\ x_1(0)=x_2(0)=0 , x_2(\frac{\pi}{2})=1 \\ x_1(\frac{\pi}{2})\ \text{آزاد} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}_1}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=0 \Rightarrow \dot{x}_1(\frac{\pi}{2})=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{sh(t)}{sh(\frac{\pi}{2})} \\ x_1=0 \end{cases}$$

۴-۱۱)

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, \dots, x^{(r)}, t)\,dt \Longrightarrow$$

$$\partial J(x, \delta x)=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\partial x(t)+\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\partial \dot{x}(t)+\frac{\partial g}{\partial \ddot{x}}\partial \ddot{x}(t)+\dots+\frac{\partial g}{\partial x^{(r)}}\partial x^{(r)}(t)\right)dt$$

$$\partial x(t_f)=0,\quad \partial x(t_0)=0$$

$$\partial(x(t))=\int_{t_0}^{t}\partial \dot{x}(t)dt+\partial x(t_0)$$

$\Rightarrow$ برای جمله ای که $\frac{\partial g}{\partial x^{(k)}}$ دارد n بار جزء به جزء می رویم و داریم:

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\partial g}{\partial x^{(k)}}\left(x^*, \dots, \frac{d^r x^*}{dt^r}\right)\right]=0$$

۴-۱۲)

a) $J(x)=\int_0^1\left[x(t)\dot{x}(t)+\ddot{x}^2(t)\right]dt$, $\begin{cases}x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1\\ x(1)=2,\ \dot{x}(1)=4\end{cases}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \ddot{x}}\right)=0 \Longrightarrow \dot{x}(t)-\dot{x}(t)+2\ddddot{x}(t)=0 \Longrightarrow x(t)=at^3+bt^2+ct+d$$

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ x(1)=2,\ \dot{x}(1)=4 \Rightarrow x(t)=t^3+t$$

b) $J(x)=\int_0^\infty\left(\dot{x}^2(t)+x^2(t)+[\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)]^2\right)dt$, $\begin{cases}x(0)=1,\ \dot{x}(0)=2\\ x(\infty)=0,\ \dot{x}(\infty)=0\end{cases}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \ddot{x}}\right)=0 \Longrightarrow 2x(t)-2\ddot{x}(t)-2(\dddot{x}(t)+\ddot{x}(t))+2(\ddddot{x}(t)+\dddot{x}(t))=0 \Longrightarrow$$

$$2\ddddot{x}(t)-4\ddot{x}(t)+2x(t)=0 \Rightarrow 2D^4-4D^2+2=0 \Rightarrow D^2=1 \Rightarrow D=\pm 1 \Rightarrow$$

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-t}$$

$$x(0)=1,\ \dot{x}(0)=2,\ x(\infty)=0,\ \dot{x}(\infty)=0 \Rightarrow x(t)=e^{-t}+3te^{-t}$$

۴-۱۳)

$J(x)=\int_0^{t_f}\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt$, $x(0)=2$, $\theta(t)=-4t+5$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{x}(t)}{2\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right)=0 \Rightarrow \ddot{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}+\frac{\dot{x}^2\ddot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x}(1+\dot{x}^2)+\dot{x}^2\ddot{x}=0 \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}=0\\ 2\dot{x}^2=-1\end{cases} \Rightarrow \ddot{x}(t)=0 \Rightarrow x(t)=at+b$$

$$x(0)=2 \Rightarrow x(t)=at+2$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}(\dot{\theta}(t_f)-\dot{x}(t_f))+g\Big|_{t_f}=0 \Rightarrow \dot{x}(t_f)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{4} \Rightarrow x(t)=\frac{1}{4}t+2$$

۴-۱۴)

$J(x)=\int_0^{t_f}\left[\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{x(t)}\right]dt$, $x(0)=0$, $\theta(t)=t-5$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \Rightarrow -\frac{1+\dot{x}^2(t)+x(t)\ddot{x}(t)}{(x(t))^2 * \sqrt{(1+\dot{x}(t)^2)^3}}=0 \Rightarrow x(t)\ddot{x}(t)+\dot{x}^2(t)=-1 \Rightarrow (x(t)\dot{x}(t))'=-1 \Rightarrow$$

$$x(t)\dot{x}(t)=-t+\frac{1}{2}c_1 \Rightarrow \frac{1}{2}x(t)^2=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}c_1t+\frac{1}{2}c_2 \Rightarrow x^2(t)=-t^2+c_1t+c_2$$

$$x(0)=0 \Rightarrow x^2(t)=-t^2+c_1t$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}(\dot{\theta}(t_f)-\dot{x}(t_f))+g\Big|_{t_f}=0 \Rightarrow \frac{1+\dot{x}(t_f)}{x(t_f)\sqrt{1+\dot{x}(t_f)}}=0 \Rightarrow 1+\dot{x}(t_f)=0 \Rightarrow \dot{x}(t_f)=-1$$

$$x(t_f)=t_f-5$$

$$\Rightarrow x^2(t)=-t^2+10t$$

۴-۱۵)

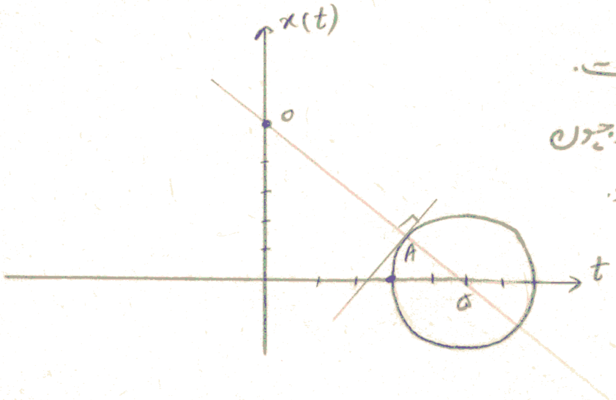
$$J(x)=\int_0^{t_f}\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt \quad , \quad x(0)=5 \quad , \quad x^2(t)+(t-5)^2-4=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \xrightarrow[\text{4-13}]{\text{در مسئله}} \left.\begin{array}{l} x(t)=at+b \\ x(0)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)=at+5$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}\left(\frac{\partial x(t_f)}{\partial t_f}-\dot{x}(t_f)\right)+g\Big|_{t_f}=0 \Rightarrow \dot{x}(t_f)\times -\frac{t_f-5}{x(t_f)}+1=0$$

$$x^2(t)+(t_f-5)^2=4 \Rightarrow \frac{\partial x(t_f)}{\partial t_f}=-\frac{t_f-5}{x(t_f)}$$

$$\Rightarrow a=-1 \Rightarrow x(t)=-t+5$$



از نظر هندسی $0A$ جواب است.
خطی که از $\begin{vmatrix}0\\5\end{vmatrix}$ و A می‌گذرد چون
عمود بر دایره است و از مرکز می‌گذرد.

۴-۱۶)

$$J(x)=\int_0^{t_f}\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{x(t)}dt \quad , \quad x(0)=0 \quad , \quad (t-9)^2+x^2(t)=9$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \xrightarrow{\text{مثال 14}} \left.\begin{array}{l} x^2(t)=c_1t^2+c_2t+c_3 \\ x(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2(t)=-t^2+c_2t$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}\left(\frac{\partial x(t_f)}{\partial t_f}-\dot{x}(t_f)\right)+g\Big|_{t_f}=0 \Rightarrow \dot{x}(t_f)\times -\frac{t_f-9}{x(t_f)}+1=0$$

$$x^2(t)+(t-9)^2=9 \Rightarrow \frac{\partial x(t_f)}{\partial t_f}=-\frac{t-9}{x(t_f)}$$

$$x^2(t_f)=9-(t_f-9)^2$$

$$\Rightarrow \{ c_2=18 \Rightarrow x_2^2(t)=18t-t^2$$

۴-۱۷) در مسئله ۴-۸ (c):
$\begin{cases} x_1=c_1 sh(t)+c_2 ch(t) \\ x_2=c_3 sh(t)+c_4 ch(t) \end{cases}$

الف) $\begin{cases} x_1(0)=0 \\ x_2(0)=0 \end{cases}$ و $\theta(t)=\begin{bmatrix} 5t+3 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$, t_f آزاد

$$\begin{cases} x_1(0)=0 \Rightarrow c_2=0 \Rightarrow x_1(t)=c_1 sh(t) \quad (1) \\ x_2(0)=0 \Rightarrow c_4=0 \Rightarrow x_2(t)=c_3 sh(t) \quad (2) \\ g+\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)^T(\dot{\theta}-\dot{x})\Big|_f=0 \Rightarrow \dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+2x_1x_2+[2\dot{x}_1 \;\; 2\dot{x}_2]\begin{bmatrix} 5-\dot{x}_1 \\ t-\dot{x}_2 \end{bmatrix}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dot{x}_1^2(t_f)-\dot{x}_2^2(t_f)+2x_1(t_f)x_2(t_f)+10\dot{x}_1(t_f)+2t_f\dot{x}_2(t_f)=0 \quad (3) \\ x_1(t_f)=5t_f+3 \quad (4) \\ x_2(t_f)=\frac{1}{2}t_f^2 \quad (5) \end{cases}$$

از ۵ معادله بالا c_1 و c_3 و t_f و $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بدست می‌آیند.

ب) $\begin{cases} x_1(0)=0 \\ x_2(0)=0 \end{cases}$ و t_f آزاد و $x_1(t)+3x_2(t)+5t=15$

$$\begin{cases} x_1(0)=0 \Rightarrow c_2=0 \Rightarrow x_1(t)=c_1 sh(t) \quad (1) \\ x_2(0)=0 \Rightarrow c_4=0 \Rightarrow x_2(t)=c_3 sh(t) \quad (2) \\ g+\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)^T\left(\left[\frac{\partial x_1}{\partial t_f} \; \frac{\partial x_2}{\partial t_f}\right]-\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}\right)\Big|_{t_f}=0 \Rightarrow \dot{x}_1+\dot{x}_2+2x_1x_2+[2\dot{x}_1 \;\; 2\dot{x}_2]\begin{bmatrix} -5-\dot{x}_1 \\ -\frac{5}{3}-\dot{x}_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \end{cases}$$

۴-۱۸)

$$J(x)=\int_{-2}^{1}\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt \quad , \quad x(-2)=x(1)=0 \quad \text{و} \quad \theta(t)=t^2+2$$

جواب معادله اویلر :

$$x(t)=c_1t+c_2 \Rightarrow \left.\begin{cases} x(t)=c_1t+c_2 & -2\le t\le t_1 \\ x(t)=c_3t+c_4 & t_1\le t\le 1 \\ x(-2)=x(1)=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x(t)=\begin{cases} c_1t+2c_1 & -2\le t\le t_1 \\ c_3t-c_3 & t_1\le t\le 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\dot\theta-\dot{x})+g\right)\Big|_{t_1^-}=\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\dot\theta-\dot{x})+g\right)\Big|_{t_1^+} \\ c_1t_1+2c_1=c_3t_1-c_3=t_1^2+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1.03853 \\ c_2=-1.87 \\ t_1=-0.495 \end{cases} \Rightarrow x(t)=\begin{cases} 1.03853t-2.077 & -2\le t\le -0.495 \\ -1.874t+1.874 & -0.495\le t\le 1 \end{cases}$$

۴-۱۹)

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f}\left[a\dot{x}^2(t)+bx(t)\dot{x}(t)+cx^2(t)\right]dt \quad , \quad a\neq 0 \quad \text{و} \quad x(t_0)=x_0 \quad \text{و} \quad x(t_f)=x_f$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^-}=\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^+} \\ \left(g-\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Big|_{t_1^-}=\left(g-\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Big|_{t_1^+} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\dot{x}a+bx\big|_{t_1^-}=2\dot{x}a+bx\big|_{t_1^+} \\ x\big|_{t_1^-}=x\big|_{t_1^+} \ \text{می دانیم} \end{cases} \Rightarrow \dot{x}\big|_{t_1^-}=\dot{x}\big|_{t_1^+} \Rightarrow$$

t_1 وجود ندارد

۴-۲۰)

$$J(x)=\int_0^4[\dot{x}(t)-1]^2[\dot{x}(t)+1]^2dt \quad , \quad x(4)=2 \quad \text{و} \quad x(0)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(2(\dot{x}^2(t)-1)\times 2\dot{x}(t)\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{x}^3(t)-\dot{x}(t)\right)=0 \Rightarrow$$

$$3\dot{x}^2(t)\ddot{x}(t)-\ddot{x}(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t)=0 \\ \dot{x}(t)=\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \ \text{در شرایط صدق نمی کند} \end{cases} \Rightarrow x(t)=c_1t+c_2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} x(t)=c_1t+c_2 & 0\le t\le t_1 \\ c_3t+c_4 & t_1\le t\le 4 \\ x(0)=0 \\ x(4)=2 \end{cases}\right\} \Rightarrow x(t)=\begin{cases} c_1t & 0\le t\le t_1 \\ c_3t+2-4c_3 & t_1\le t\le 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^-}=\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^+} \Rightarrow (\dot{x}^2-1)\dot{x}\big|_{t_1^-}=(\dot{x}^2-1)\dot{x}\big|_{t_1^+} \Rightarrow (c_1^2-1)c_1=(c_3^2-1)c_3 \\ \left(g-\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Big|_{t_1^-}=\left(g-\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Big|_{t_1^+} \Rightarrow (c_1^2-1)^2-4(c_1^2-1)c_1=(c_3^2-1)^2-4(c_3^2-1)c_3 \\ g\big|_{t_1^-}=g\big|_{t_1^+} \Rightarrow c_1t_1=c_3t_1+2-4c_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \ \text{و} \ c_3=-1 \ \text{و} \ t_1=3 \\ c_1=-1 \ \text{و} \ c_3=1 \ \text{و} \ t_1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 3 \\ -t+6 & 3\le t\le 4 \end{cases} \\ \text{یا} \\ x(t)=\begin{cases} -t & 0\le t\le 1 \\ t-2 & 1\le t\le 4 \end{cases} \end{cases}$$

۴-۲۱)

$y_2 = y_1^2 - 4.5 \quad , \quad f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$

$f(y_1, y_2) = y_1^2 + (y_1^2 - 4.5)^2 \Rightarrow f(y_1) = y_1^4 - 8y_1^2 + 20.25 \Rightarrow f'(y_1) = 0 \Rightarrow 4y_1^3 - 16y_1 = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} y_1 = 0 \Rightarrow f''(y_1) < 0 & \text{ماکسیمم} \\ y_1 = \pm 2 \Rightarrow f''(y_1) > 0 & \text{مینیمم} \Rightarrow y_2 = -0.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \pm 2 \\ y_2 = -0.5 \end{cases}$

۴-۲۲)

$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad , \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 5 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3 = 9 \end{cases}$

$f(y, p) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + p_1(y_1 + y_2 + y_3 - 5) + p_2(y_1^2 + y_2^2 + y_3 - 9) = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + p_1 + 2p_2 y_1 = 0 \\ 2y_2 + p_1 + 2p_2 y_2 = 0 \\ 2y_3 + p_1 + p_2 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 - 5 = 0 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = [2, 2, 1]^T & : \text{مینیمم مطلق} \\ y = [-1, -1, 7]^T & : \text{مینیمم نسبی} \end{cases}$

۴-۲۳)

(۴-۲۴

a) $J(w)=\int_{t_0}^{t_f}\left[w_1^2(t)+w_1(t)w_2(t)+w_2^2(t)+w_3^2(t)\right]dt$

$$\begin{cases}\dot{w}_1(t)=w_2(t)\\ \dot{w}_2(t)=-w_1(t)+(1-w_1^2(t))\,w_2(t)+w_3(t)\end{cases}$$

$$g_a=w_1^2+w_1w_2+w_2^2+w_3^2+p_1(\dot{w}_1-w_2)+p_2(\dot{w}_2+w_1+(1-w_1^2)w_2+w_3)\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial w_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{w}_i}\right)=0 \Longrightarrow \begin{cases}2w_1+w_2+p_2-2p_2w_1w_2-\dot{p}_1=0\\ w_1+2w_2-p_1+p_2(1-w_1^2)-\dot{p}_2=0\\ 2w_3+p_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{p}_1(t)=2w_1(t)+w_2(t)+p_2(t)+2p_2(t)w_1(t)w_2(t)\\ \dot{p}_2(t)=w_1(t)+2w_2(t)-p_1(t)+p_2(t)(1-w_1^2(t))\\ 2w_3(t)+p_2(t)=0\end{cases}$$

$i=1,2,3$

b) $J(w)=\int_{t_0}^{t_f}(\lambda+w_3^2(t))\,dt \quad ,\ \lambda>0$

$$\begin{cases}\dot{w}_1(t)=w_2(t)\\ \dot{w}_2(t)=w_3(t)\end{cases}$$

$$g_a=\lambda+w_3^2(t)+p_1(t)(\dot{w}_1(t)-w_2(t))+p_2(t)(\dot{w}_2(t)-w_3(t))$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial w_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{w}_i}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\dot{p}_1(t)=0\\ \dot{p}_2(t)=-p_1(t)\\ 2w_3(t)-p_2(t)=0\end{cases}$$

$i=1,2,3$

c) $J(w)=\int_{t_0}^{t_f}[\lambda+w_3^2(t)]dt,\ \lambda>0$

$$\begin{cases}\dot{w}_1(t)=w_2(t)\\ \dot{w}_2(t)=-w_2(t)|w_2(t)|+w_3(t)\end{cases}$$

$$g_a=\lambda+w_3^2(t)+p_1(t)(\dot{w}_1(t)-w_2(t))+p_2(t)(\dot{w}_2(t)+w_2(t)|w_2(t)|-w_3(t))$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial w_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{w}_i}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\dot{p}_1(t)=0\\ \dot{p}_2(t)=-p_1(t)+2p_2(t)|w_2(t)|\\ 2w_3(t)-p_2(t)=0\end{cases}$$

$i=1,2,3$

(۴-۲۵

$J(x)=\int_0^1[\dot{x}^2(t)+t^2]dt,\quad x(0)=0,\ x(1)=0,\ \int_0^1 x^2(t)dt=2$

$$\dot{z}(t)=x^2(t)\Rightarrow g_a=\dot{x}^2(t)+t^2+p_1(t)(\dot{z}(t)-x^2(t))\Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial g_a}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}\right)=0\\ \frac{\partial g_a}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{z}}\right)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-2p_1x-2\ddot{x}=0\\ \dot{p}_1=0\Rightarrow p_1=a\end{cases}\Rightarrow \left.\begin{matrix}a x+\ddot{x}=0\\ x(0)=x(1)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x(t)=c\sin(n\pi t)\\ \int_0^1 x^2(t)dt=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow c^2=4\Rightarrow c=\pm 2\Rightarrow \begin{cases}x(t)=\pm 2\sin(n\pi t)\\ n=1,2,\dots\end{cases}$$

۴-۲۶

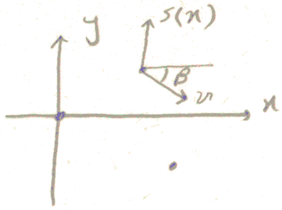
$$J=\int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\dot{\omega}_1^2+\dot{\omega}_2^2+\dot{\omega}_3^2}\right)^2dt=\int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}(\dot{\omega}_1^2+\dot{\omega}_2^2+\dot{\omega}_3^2)dt$$

$$g_a=\dot{\omega}_1^2+\dot{\omega}_2^2+\dot{\omega}_3^2+p\,f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\Rightarrow \frac{\partial g_a}{\partial \omega_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\omega}_i}\right)=0 \quad i=1,2,3 \Rightarrow \begin{cases} p\frac{\partial f}{\partial \omega_1}-2\ddot{\omega}_1=0\\ p\frac{\partial f}{\partial \omega_2}-2\ddot{\omega}_2=0\\ p\frac{\partial f}{\partial \omega_3}-2\ddot{\omega}_3=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} p=\dfrac{2\ddot{\omega}_1}{\frac{\partial f}{\partial \omega_1}}\\ p=\dfrac{2\ddot{\omega}_2}{\frac{\partial f}{\partial \omega_2}}\\ p=\dfrac{2\ddot{\omega}_3}{\frac{\partial f}{\partial \omega_3}}\end{cases}\Rightarrow \frac{\ddot{\omega}_1}{\frac{\partial f}{\partial \omega_1}}=\frac{\ddot{\omega}_2}{\frac{\partial f}{\partial \omega_2}}=\frac{\ddot{\omega}_3}{\frac{\partial f}{\partial \omega_3}}$$

(۵-۱

الف) $\begin{cases} \dot{x} = v\cos\beta \\ \dot{y} = s(x) - v\sin\beta \end{cases}$



ب) $J = \int_0^{t_f} dt$

$$H = 1 + P_1(v\cos\beta) + P_2(s(x) - v\sin\beta) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_1} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_2} \\ \dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v\cos\beta \\ \dot{y} = s(x) - v\sin\beta \\ \dot{P}_1 = P_2 s'(x) \\ \dot{P}_2 = 0 \\ -P_1 v\sin\beta - P_2 v\cos\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v\cos\beta \\ \dot{y} = s(x) - v\sin\beta \\ \dot{P}_1 = P_2 s'(x) \\ \dot{P}_2 = 0 \\ \tan\beta = -\frac{P_2}{P_1} \end{cases}$$

ج) $$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\beta \\ \dot{y} = s - v\sin\beta \\ \dot{P}_1 = 0 \\ \dot{P}_2 = 0 \\ \tan\beta = \frac{P_2}{P_1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v\cos\beta \\ \dot{y} = s - v\sin\beta \\ \tan\beta = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v/\sqrt{c^2+1} & (1) \\ \dot{y} = s - vc/\sqrt{c^2+1} & (2) \\ \beta = \tan^{-1}(c) & (3) \end{cases}$$

د) از رابطه ③ واضح است که اگر β زیاد باشد c زیاد است. پس $\dot{x}$ کم است و کندتر به جواب می رسیم. پس β باید کم باشد. ولی β کم باعث می شود که $\dot{y}$ مثبت شود و به نقطه ۲ نرسیم.

(۵-۲

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + (1 - x_1^2(t))\, x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad \text{و} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{2}(2x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t))dt$$

الف) $H = x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + P_1(t)\,x_2(t) + P_2(t)(-x_1(t) + (1 - x_1^2(t)) + u(t))$

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \Rightarrow \\ \dot{P}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \dot{P}_1(t) = -(2x_1(t) - P_2(t) - 2x_1(t)\,x_2(t)\,P_2(t)) \\ \dot{P}_2(t) = -(x_2(t) + P_1(t) + P_2(t)(1 - x_1^2(t))) \end{cases}$$

ب) i) $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u(t) + P_2(t) = 0 \Rightarrow u(t) = -P_2(t)$

ii) $H = \frac{1}{2}u^2(t) + P_2(t)u(t) + \cdots \Rightarrow u(t) = \begin{cases} -1 & P_2(t) > 1 \\ -P_2(t) & |P_2(t)| \le 1 \\ 1 & P_2(t) < -1 \end{cases}$

(۵-۳

$15x_1(t) + 20x_2(t) + 12t = 60$

$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2(t)dt$

الف) $H = \frac{1}{2}u^2(t) + P_1(t)\,x_2(t) + P_2(t)(-x_1(t) + (1 - x_1^2(t))\,x_2(t) + u(t))$

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dot{P}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P}_1(t) = -(-P_2(t) - 2x_1(t)\,x_2(t)) \\ \dot{P}_2(t) = -(P_1(t) + P_2(t)(1 - x_1^2(t))) \end{cases}$$

ب) i) $\frac{\partial H}{\partial u}=0 \Rightarrow u(t)+p_2(t)=0 \Rightarrow u(t)=-p_2(t)$

ii) $H=\frac{1}{2}u^2(t)+p_2(t)u(t)+\cdots \Rightarrow \min(H) \Rightarrow u(t)=\begin{cases}1 & p_2(t)>1\\ -p_2(t) & |p_2(t)|\leq 1\\ -1 & p_2(t)<-1\end{cases}$

ج) $\begin{cases} t_f \text{ آزاد} \\ m=15x_1(t)+20x_2(t)+12t-60=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{t_f}-p(t_f)=d\,\frac{\partial m}{\partial x}\Big|_{t_f}\\ m\big|_{t_f}=0\\ H\big|_{t_f}+\frac{\partial h}{\partial t}\Big|_{t_f}=d\,\frac{\partial m}{\partial t}\Big|_{t_f}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-p_1(t_f)=d\times 15\\ -p_2(t_f)=-d\times 20\\ 15x_1(t_f)+20x_2(t_f)+12t_f-60=0\\ \frac{1}{2}u^2(t_f)+p_1(t_f)x_2(t_f)+p_2(t_f)(-x_1(t_f)+(1-x_1^2(t_f))x_2(t_f)+u(t_f))=d\times 12\end{cases}$

۵-۴)

$[x_1(t)-4]^2+[x_2(t)-5]^2+(t-2)^2=9 \quad , \quad |u(t)|\leq 1 \; , \; t_f$ آزاد

الف) $J=\int_0^{t_f}|u(t)|\,dt \Rightarrow H=|u(t)|+p_1(t)x_2(t)+p_2(t)\left(-x_1(t)+(1-x_1^2(t))x_2(t)+u(t)\right)$

$\begin{cases}\dot{p}_1(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_1}\\ \dot{p}_2(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{p}_1(t)=-(-p_2(t)-2p_2(t)x_1(t)x_2(t))\\ \dot{p}_2(t)=-(p_1(t)+p_2(t)(1-x_1^2(t)))\end{cases}$

ب) $H=|u(t)|+p_2(t)u(t)+\cdots \Rightarrow u(t)=\begin{cases}-1 & p_2(t)>1\\ 1 & p_2(t)<-1\\ 0 & |p_2(t)|<1\\ \text{مثبت نامعین} & p_2(t)=-1\\ \text{منفی نامعین} & p_2(t)=1\end{cases}$

ج) $\begin{cases}t_f \text{ آزاد}\\ m=[x_1(t)-4]^2+[x_2(t)-5]^2+(t-2)^2-9=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{t_f}-p(t_f)=d\,\frac{\partial m}{\partial x}\Big|_{t_f}\\ m\big|_{t_f}=0\\ H\big|_{t_f}+\frac{\partial h}{\partial t}\Big|_{t_f}=d\,\frac{\partial m}{\partial t}\Big|_{t_f}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-p_1(t_f)=d\times 2(x_1(t_f)-4)\\ -p_2(t_f)=d\times 2(x_2(t_f)-5)\\ [x_1(t_f)-9]^2+[x_2(t_f)-9]^2+(t_f-2)^2=9\\ |u(t_f)|+p_1(t_f)x_2(t_f)+p_2(t_f)(-x_1(t_f)+(1-x_1^2(t_f))x_2(t_f)+u(t_f))=d\times 2(t_f-9)\end{cases}$

۵-۵)

حل مسائل کنترل بهینه «فصل ۵»

۶-۵)

$\dot{x}(t)=x(t)+u(t)$

الف) $J=\int_0^T (1.5x^2(t)+0.5u^2(t))dt$

$$H=1.5x^2(t)+0.5u^2(t)+p(t)(x(t)+u(t)) \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}\\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}\\ \frac{\partial H}{\partial u}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)+u(t)\\ \dot{p}(t)=-3x(t)-p(t)\\ u(t)+p(t)=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{p}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ p(t)\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x(T)\\ p(T)\end{bmatrix}=\phi(T,t)\begin{bmatrix}x(t)\\ p(t)\end{bmatrix}$$

شرائط مرزی: $p(T)=0$

$$\Rightarrow p(t)=-\frac{\phi_{21}(T,t)}{\phi_{22}(T,t)}x(t)$$

$$\phi(T,t)=\begin{bmatrix}\cosh 2(t-T)+\frac{1}{2}\sinh 2(t-T) & \frac{1}{2}\sinh 2(T-t)\\ \frac{3}{2}\sinh 2(t-T) & \cosh 2(t-T)+\frac{1}{2}\sinh 2(t-T)\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$p(t)=-\frac{\frac{3}{2}\sinh 2(t-T)}{\cosh 2(t-T)+\frac{1}{2}\sinh 2(t-T)}x(t) \Rightarrow u(t)=+\frac{3\sinh 2(t-T)}{2\cosh 2(t-T)+\sinh 2(t-T)}x(t)$$

ب) $T\to\infty$

$$\lim_{T\to\infty} u(t)x(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{3(e^{2t-2T}-e^{2T-2t})}{3e^{2t-2T}+e^{2T-2t}}x(t)=\lim \frac{-3e^{2T-2t}}{e^{2T-2t}}=-3x(t) \Rightarrow u(t)=-3x(t)$$

۷-۵)

$\dot{x}(t)=-ax(t)+u(t)$ و $x(0)$, T , $x(T)=0$ و $J=\int_0^T u^2(t)dt$

الف) $H=u^2(t)+p(t)*(-ax(t)+u(t))$

$$\begin{cases}\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}\\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}\\ \frac{\partial H}{\partial u}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}(t)=-ax(t)+u(t)\\ \dot{p}(t)=+ap(t)\\ 2u(t)+p(t)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p(t)=-2c_1e^{+at}\\ u(t)=+c_1e^{+at}\\ x(t)=(c_2+c_1t)e^{-at}\end{cases}$$

$$x(0)=x_0,\quad x(T)=0 \Rightarrow x(t)=\frac{e^{-at+2aT}-e^{at}}{e^{2aT}-1}x(0)$$

ب) $u(t)=\dot{x}(t)+ax(t) \Rightarrow u(t)=-\frac{2ae^{at}x(0)}{e^{2aT}-1}$

ج) $u(t)=F(t,T,a)x(t) \Rightarrow F(t,T,a)=\frac{u(t)}{x(t)}=+\frac{2ae^{at}}{e^{2at}-e^{2aT}} \longrightarrow F(t,T,a)=\frac{2ae^{at}}{e^{2at}-e^{2aT}}$

د) $t\to T \Rightarrow$
- $F\to\infty$ (در این حالت برای ورودی معتدل باید $x(t)\to 0$.) $\Rightarrow u\to \frac{-2ae^{aT}x(0)}{e^{2aT}-1}$
- $T\to\infty$ $\begin{cases}F\to 0\\ u\to 0\end{cases}$ (در این حالت سیستم بدون ورودی چون $a>0$ به مبدأ می رود)

«حل مسائل کنترل بهینه» فصل ۵»

۵-۸) چون $\frac{\partial^2 H}{\partial u} = R(t)$ که مثبت معین است پس شرط لازم را دارد.

۵-۹)

الف) $\left.\begin{array}{l} p(t) = K(t)\,x(t) \\ p(t_f) = H\,x(t_f) \end{array}\right\} \Rightarrow K(t_f) = H$ قسمت اول

$$p(t) = K(t)\,x(t) \Rightarrow \dot p(t) = \dot K(t)x(t) + K(t)\dot x(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot x(t) \\ \dot p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$p(t) = K(t)x(t)$$

$$-Q(t)x(t) - A^T(t)(K(t)x(t)) = \dot K(t)x(t) + K(t)(A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)) \Rightarrow$$

$$\dot K(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$ قسمت دوم

ب) ثابت می کنیم $K^T(t)$ هم جواب است و چون معادله یک جواب دارد پس $K(t) = K^T(t)$ و K متقارن می شود.

از طرفین رابطه‌ی اثبات شده ترانهاده می گیریم $\Rightarrow \begin{cases} \dot K^T(t) = -A^T(t)K^T(t) - K^T(t)A(t) - Q^T(t) + K^T(t)B(t){R^{-1}}^T(t)B^T(t)K^T(t) \\ K^T(t_f) = H^T \\ \text{می‌دانیم}: Q^T(t) = Q(t),\ H^T(t) = H(t),\ R^T(t) = R(t) \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} (K^T)^{\cdot}(t) = -A^T(t)K^T(t) - K^T(t)A(t) - Q(t) + K^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \\ (K^T)(t_f) = H \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $K^T(t)$ هم جواب است پس $K(t)$ متقارن است.

ج) $x(t_f) = 0 \Longrightarrow$ (فقط در شرط اولیه فرق می کند، یعنی $K(t_f) = \infty$ باید باشد)

۵-۱۰)

$$x(t_f) = 0 \xrightarrow{(\text{رابطه } 5.2\text{-}12)} \phi_{11}(t_f,t)x^*(t) + \phi_{12}(t_f,t)p^*(t) = 0 \Longrightarrow p^*(t) = -\phi_{12}^{-1}(t_f,t)\phi_{11}(t_f,t)x(t)$$

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t) \Rightarrow$$

$$u^*(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\phi_{12}^{-1}(t_f,t)\phi_{11}(t_f,t)x(t)$$

۵-۱۱)

الف) $\dot x(t) = -x(t) + u(t)$ و $x(0) = x_0,\ x(1) = 0$ و $J = \int_0^1 \frac{1}{2}[3x^2(t) + u^2(t)]dt$

$$H = \frac{3}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + p(t)(-x(t) + u(t))$$

$$\begin{cases} \dot x(t) = -x(t) + u(t) \\ \dot p(t) = -3x(t) + p(t) \\ u(t) + p(t) = 0 \\ x(0) = x_0,\ x(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \dfrac{e^{-2t}(3e^{4t} + e^4)x_0}{-(e^4 - 1)} \\ x(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{4-2t}}{-(e^4 - 1)}x_0 \end{cases} \Rightarrow u(t) = \frac{3e^{2t} + e^{4-2t}}{e^{2t} - e^{4-2t}}x(t)$$

ب) فقط شرط $x(1) = 0$ با $p(1) = 0$ جایگزین می‌شود $\Rightarrow \begin{cases} u(t) = -\dfrac{3e^{4-2t} - 3e^{2t}}{1 + 3e^4}x_0 \\ x(t) = \dfrac{e^{-2t}(3e^4 + e^{4t})}{1 + 3e^4}x_0 \end{cases} \Rightarrow u(t) = \dfrac{3(e^{2t} - e^{4-2t})}{3e^{4-2t} + e^{2t}}x(t)$

۵-۱۲)

الف)
$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t)\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x(0)=0\\ x_1(t)+5x_2(t)=15\end{cases} \quad \text{و} \quad J=\frac{1}{2}(x_1(2)-5)^2+\frac{1}{2}(x_2(2)-2)^2+\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

$$H=\frac{1}{2}u^2(t)+p_1(t)x_2(t)+p_2(t)(-x_2(t)+u(t)) \Longrightarrow \begin{cases}\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial p}\\ \dot{p}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}\\ \frac{\partial H}{\partial u}=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t)\\ \dot{p}_1(t)=0\\ \dot{p}_2(t)=-p_1(t)+p_2(t)\\ u(t)+p_2(t)=0\end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1(t)=c_1+c_2(1-e^{-t})+c_3(-t-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t})+c_4(1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t})\\ x_2(t)=c_2e^{-t}+c_3(-1+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t})+c_4(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t})\\ p_1(t)=c_3\\ p_2(t)=c_3(1-e^{t})+c_4e^{t}\end{cases}$$

شرایط مرزی:
$$\begin{cases}x(0)=0 \Longrightarrow \begin{cases}x_1(0)=0\\ x_2(0)=0\end{cases}\\ x_1(t)+5x_2(t)=15 \rightarrow \begin{cases}\frac{\partial h}{\partial x_1}\Big|_{t=2}-p_1(2)=d\frac{\partial m}{\partial x_1}\Big|_{t=2}\\ \frac{\partial h}{\partial x_2}\Big|_{t=2}-p_2(2)=d\frac{\partial m}{\partial x_2}\Big|_{t=2}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_1(2)-5-p_1(2)=d\\ x_2(2)-2-p_2(2)=5d\\ x_1(2)+5x_2(2)=15\end{cases}\end{cases}$$

از شرایط مرزی داریم
$$c_1=c_2=0,\quad c_3=-2.59762\approx-2.6,\quad c_4=-2.63688\approx-2.64$$
پس: $u(t)=2.6+0.04e^{t}$

ب) $J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$

قسمت الف این مسأله $\Rightarrow J=7.41992$ — ① در این حالت هدف نزدیک شدن تا حد امکان به نقطه $(5,2)$ بوده است. (در حالتی که روی منحنی $x_1+5x_2=15$ باشد.)

قسمت الف مثال $\Rightarrow J=16.74$ — ② در این حالت هدف رسیدن به آن نقطه بوده است.

قسمت ب مثال $\Rightarrow J=3.54$ — ③ در این حالت هدف نزدیک شدن به نقطه $(5,2)$ بوده است.

در ① باید روی منحنی $x_1(t)+5x_2(t)=15$ برسد و این باعث شده است که نسبت به ③ انرژی بیشتری ببرد. در حالت ۲ باید به نقطه $(5,2)$ برسد و چون هر چه زمان می‌گذرد انرژی بیشتری می‌خواهیم مقدار انرژی زیاد شده است.

۵-۱۳)

$$\dot{x}(t)=-0.1x(t)+u(t) \quad \text{و} \quad 0\le u(t)\le M$$

الف)
$$H=-x(t)+p(t)(-0.1x(t)+u(t)) \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial H}{\partial p}=\dot{x}(t)\\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}\\ H \text{ مینیمم}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}(t)=-0.1x(t)+u(t)\\ \dot{p}(t)=0.1p(t)+1\\ (p(t)u(t))_{min}\\ \text{شرط مرزی}: p(10)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p(t)=-10+10e^{0.1t-1}<0\\ u(t)=\begin{cases}0 & p(t)>0\\ M & p(t)<0\\ \text{نامعلوم} & p(t)=0\end{cases}\end{cases}$$

$$u(t)=M,\quad t\in[0,10]$$

ب)
$$\int_0^{10}u(t)dt=K \Rightarrow \begin{cases}\dot{z}(t)=u(t)\\ z(0)=0,\ z(10)=K\end{cases}$$

$$H=-x_1(t)+p_1(t)(-0.1x(t)+u(t))+p_2(t)u(t) \Rightarrow \begin{cases}\dot{z}(t)=u(t)\\ \dot{x}(t)=-0.1x(t)+u(t)\\ \dot{p}_1(t)=1+0.1p_1(t)\\ \dot{p}_2(t)=0\\ (p_1(t)+p_2(t))u(t)\big|_{min}\end{cases}$$

ادامه در صفحه بعد

$$\begin{cases} \dot z(t)=u(t) \\ \dot x(t)=-0.1x(t)+u(t) \\ \dot P_1(t)=+1+0.1P_1(t) \\ \dot P_2(t)=0 \\ (P_1(t)+P_2(t))u(t)\big|_{min} \\ \text{شرایط حدی} \begin{cases} P_1(10)=0 \\ z(10)=K \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)=\begin{cases} M & P_1(t)+P_2(t)<0 \\ 0 & P_1(t)+P_2(t)>0 \\ \text{نامعین} & P_1(t)+P_2(t)=0 \end{cases} \\ P_1(t)=-10(1-e^{0.1t-1}) \\ P_2(t)=C_1>0 ,\quad z(10)=\int_0^{10}u(t)\,dt=K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u(t)\begin{cases} M & \overbrace{C_1-10(1-e^{0.1t-1})<0}^{\text{برای } t \text{ کم درست است}} \\ 0 & \underbrace{C_1-10(1-e^{0.1t-1})>0}_{\text{برای } t \text{ زیاد درست است}} \end{cases} \\ \int_0^{10}u(t)\,dt=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)=\begin{cases} M & t\leq t_1 \\ 0 & t>t_1 \end{cases} \\ \int_0^{10}u(t)\,dt=K \end{cases} \Rightarrow Mt_1=K \Rightarrow t_1=\frac{K}{M} \Rightarrow$$

$$u(t)=\begin{cases} M & t\in[0,\frac{K}{M}] \\ 0 & t\in[\frac{K}{M},10] \end{cases}$$

ج) $J=-x(10) \quad , \int_0^{10}u(t)\,dt=K \Rightarrow \begin{cases} \dot z(t)=u(t) \\ z(0)=0 ,\ z(10)=K \end{cases}$

$$H=P_1(t)(-0.1x(t)+u(t))+P_2(t)u(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot z(t)=u(t) \\ \dot x(t)=-0.1x(t)+u(t) \\ \dot P_1(t)=0.1P(t) \\ \dot P_2(t)=0 \\ (P_1(t)+P_2(t))u(t)\big|_{min} \\ \text{شرایط حدی} \begin{cases} -1-P_1(10)=0 \\ z(10)=K \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)=\begin{cases} M & \overbrace{C_1-e^{0.1t-1}<0}^{\text{برای } t \text{ زیاد درست است}} \\ 0 & \underbrace{C_1-e^{0.1t-1}>0}_{\text{برای } t \text{ کم درست است}} \end{cases} \\ P_2(t)=C_1>0 \\ P_1(t)=-e^{0.1t-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t)=\begin{cases} M & t\geq t_1 \\ 0 & t\leq t_1 \end{cases} \\ \int_0^{10}u(t)\,dt=K \end{cases} \Rightarrow t_1=10-\frac{K}{M} \Rightarrow u(t)=\begin{cases} M & t\in[10-\frac{K}{M},10] \\ 0 & t\in[0,10-\frac{K}{M}] \end{cases}$$

(۱۴-۵

الف) $\dot x(t)=ax(t)+u(t) \quad , \quad J=\int_0^{\infty}[qx^2(t)+ru^2(t)]\,dt \quad , q,r>0$

$$\begin{cases} A=a \\ B=1 \\ Q=2q \\ R=2r \end{cases} \Rightarrow 0=-aK-aK-2q+K\times1\times\frac{1}{2r}\times1\times K \Rightarrow K^2-4rq-2raK=0 \Rightarrow K^2-4raK-4rq=0 \Rightarrow$$

$$K=2r(a\pm\sqrt{a^2+\frac{q}{r}}) \Rightarrow \text{مدار بسته}=\frac{G(s)}{1-FG(s)}$$

$$F=-R^{-1}B^TK \Rightarrow F=-\frac{K}{2r}$$

$$(G(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\ldots}$$

$$\Rightarrow \text{مدار بسته}=\frac{\frac{1}{s-a}}{1+\frac{K}{2r}\times\frac{1}{s-a}}=\frac{1}{s\pm\sqrt{a^2+\frac{q}{r}}} \Rightarrow \left(\begin{matrix}\text{قطب} \\ -\sqrt{a^2+\frac{q}{r}}\end{matrix}\right)$$

$\frac{q}{r}$ که بزرگ شود قطبها بزرگتر می‌شوند

ب) $\begin{cases} \dot x_1(t)=x_2(t) \\ \dot x_2(t)=-4x_1(t)-4x_2(t)+u(t) \end{cases}$ ، $J=\int_0^\infty [20x_1^2(t)+5x_2^2(t)+u^2(t)]\,dt$

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix}0&1\\-4&-4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\ Q=\begin{bmatrix}40&0\\0&10\end{bmatrix},\ R=2 \end{cases} \Rightarrow 0=-K\begin{bmatrix}0&1\\-4&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-4\\1&-4\end{bmatrix}K-\begin{bmatrix}40&0\\0&10\end{bmatrix}+K\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\times\frac{1}{2}[0\ \ 1]K,\quad K=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

۴ سری جواب داریم

1) $K=\begin{bmatrix}-92&4\\4&18\end{bmatrix} \Rightarrow F=[-2\ \ 9] \Rightarrow 1-FG(s)B=\dfrac{s^2-5s+6}{s^2+4s+4} \Rightarrow \begin{cases}s=2\\s=3\end{cases}$

2) $K=\begin{bmatrix}-44&-20\\-20&-6\end{bmatrix} \Rightarrow F=[10\ \ 3] \Rightarrow 1-FG(s)B=\dfrac{s^2+s-6}{s^2+4s+4} \Rightarrow \begin{cases}s=-3\\s=2\end{cases}$

3) $K=\begin{bmatrix}-32&-26\\-16&-8\end{bmatrix} \Rightarrow F=[8\ \ 4] \Rightarrow 1-FG(s)B=\dfrac{s-2}{s+2} \Rightarrow \{s=2$

4) $K=\begin{bmatrix}-32&-16\\-26&-8\end{bmatrix} \Rightarrow F=[13\ \ 4] \Rightarrow 1-FG(s)B=\dfrac{s^2-9}{s^2+4s+4} \Rightarrow \{s=\pm 3$

قطبهای حلقه باز ⇐ $G(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+4}{(s+2)^2}&\dfrac{1}{(s+2)^2}\\-\dfrac{4}{(s+2)^2}&\dfrac{s}{(s+2)^2}\end{bmatrix} \Rightarrow$ قطب $=-2$

(۵-۱۵)

$\begin{cases}\dot i(t)=-\frac{R}{L}i(t)+\frac{1}{L}v_{in}(t)\\ \dot w(t)=\frac{K}{I}i(t)\end{cases}$ ، $\tau_d(t)=Ki(t)$ ، $K=K_t I_a$ ، $J=\int_0^\infty (i^2(t)+w^2(t)+v_{in}^2(t))\,dt$

$R=L=K=I=1$

$$A=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},\ r=2 \Rightarrow 0=-K\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}K-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+K\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\times\frac{1}{2}\times[1\ \ 0]K,\quad K=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

۳ سری جواب داریم:

1) $K=\begin{bmatrix}-6&2\\2&-4\end{bmatrix} \Rightarrow F=[3\ \ -1] \Rightarrow u(t)=3i(t)-w(t)$ ، قطبها $\begin{cases}s=1\\s=-1\end{cases}$ X

2) $K=\begin{bmatrix}-2&-2\\-2&0\end{bmatrix} \Rightarrow F=[1\ \ 1] \Rightarrow u(t)=i(t)+w(t)$ ، قطبها $\{s=1$ X

3) $K=\begin{bmatrix}2&2\\2&4\end{bmatrix} \Rightarrow F=[-1\ \ -1] \Rightarrow u(t)=-i(t)-w(t)$ ، قطبها $\{s=-1$ قابل قبول

(۵-۱۴

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\ y(t)=C(t)x(t)\end{cases},\quad J=\frac{1}{2}\|y(t_f)\|^2_H+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\|y(t)\|^2_{Q(t)}+\|u(t)\|^2_{R(t)}\right]dt \quad , \quad t_f \text{ معین}$$

الف)

$$J=\frac{1}{2}y^T(t_f)Hy(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[y^T(t)Q(t)y(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \Rightarrow$$

$$J=\frac{1}{2}x^T(t_f)\underbrace{C^T(t_f)HC(t_f)}_{H_{new}}x(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^T(t)\underbrace{C^T(t)Q(t)C(t)}_{Q_{new}(t)}x(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \Rightarrow$$

$$J=\frac{1}{2}x^T(t_f)H_{new}x(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^T(t)Q_{new}(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right]dt$$

که تنظیم کننده خطی است.

ب) این همان تنظیم کننده خطی است با

$$\begin{cases}Q_{new}(t)=C^T(t)Q(t)C(t)\\ H_{new}=C^T(t_f)HC(t_f)\end{cases}$$

پس

$$\begin{cases}u^*(t)=F(t)x(t)\\ F(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\\ K(t)=\left[\phi_{22}(t_f,t)-H_{new}\phi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[H_{new}\phi_{11}(t_f,t)-\phi_{21}(t_f,t)\right]\\ \phi(t_f,t)=(\text{با توجه به } Q_{new}(t) \text{ بدست می آید})\end{cases}$$

(۵-۱۷

الف)

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=-x(t)+u(t)\\ r(t)=\alpha e^{-t}\end{cases},\quad J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\{q[x(t)-r(t)]^2+u^2(t)\}dt \quad , \quad q>0 \Rightarrow \tilde{x}(t)=x(t)-r(t)$$

[سیستم تنظیم کننده می شود.]

با جایگذاری متغیر جدید در معادله و تابع هزینه داریم: اثبات

$$\Rightarrow\begin{cases}(\tilde{x}(t)+r(t))^{\cdot}=-(\tilde{x}(t)+r(t))+u(t)\\ J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{q[(\tilde{x}(t)+r(t))-r(t)]^2+u^2(t)\}dt\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t)+\dot{r}(t)=-\tilde{x}(t)-r(t)+u(t)\\ J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{q\tilde{x}^2(t)+u^2(t)\}d(t)\end{cases}\xrightarrow{r(t)=\alpha e^{-t}}\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t)=-\tilde{x}(t)+u(t)\\ J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{q\tilde{x}^2(t)+u^2(t)\}dt\end{cases}$$

تنظیم کننده خطی است:

ب)

$$\begin{cases}y^{(n)}(t)=-a_{n-1}y^{(n-1)}(t)-a_{n-2}y^{(n-2)}(t)-\dots-a_0y(t)+u(t) & (1)\\ J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{q[y(t)-r(t)]^2+u^2(t)\}dt,\quad q>0 & (2)\\ r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\dots+a_0r(t)=0 & (3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_i(t)=y^{(i-1)}(t)-r^{(i-1)}(t) \quad (4)$$

از رابطه (۱) و (۳) داریم:

$$y^{(n)}(t)-r^{(n)}(t)=-a_{n-1}(y^{(n-1)}(t)-r^{(n-1)}(t))-a_{n-2}(y^{(n-2)}(t)-r^{(n-2)}(t))-\dots-a_0(y(t)-r(t))+u(t)\xrightarrow{(4)}$$

$$\dot{x}_n(t)=-a_{n-1}x_n(t)-a_{n-2}x_{n-1}(t)-\dots-a_0x_1(t)+u(t)\Rightarrow$$

بقیه در صفحه بعد

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)=-a_{n-1}x_n(t)-a_{n-2}x_{n-1}(t)-\cdots-a_0x_1(t)+u(t)\end{cases} \quad (5)$$

حال رابطهٔ (۲) را ساده می‌کنیم:

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{q[x_1(t)]^2+u^2(t)\}dt \quad (4)$$

که با رابطهٔ (۵) و (۴) مشخص است که یک تنظیم کنندهٔ خطی داریم که در آن:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\\vdots&&&&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&&-a_{n-1}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}q&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\quad R=1$$

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)\Rightarrow u^*(t)=-[k_{n1}(t)\ k_{n2}(t)\cdots k_{nn}(t)]\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}$$

$$K(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(sI-\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}0&1&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&&&&\vdots&\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&0&0&\cdots&0\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}&0&0&0&\cdots&-1\\\hline q&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&+a_0\\0&0&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0&+a_1\\\vdots&&&&\vdots&\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&1&+a_{n-1}\end{array}\right]^{-1}\right)$$

(۵-۱۸

الف)

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases},\quad J=\int_0^{\infty}[q_{11}x_1^2(t)+q_{22}x_2^2(t)+Ru^2(t)]dt,\quad\begin{cases}x_1(0)=10,\ x_2(0)=0\\ R=1,\ q_{11}=4,\ q_{22}=0\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}8&0\\0&0\end{bmatrix},\ R=2\Rightarrow 0=-K\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}K-\begin{bmatrix}8&0\\0&0\end{bmatrix}+K\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}K=0;\quad K=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

۲ سری جواب داریم:

$$1)\ K=\begin{bmatrix}-8&4\\4&-4\end{bmatrix}\Rightarrow F=[-2\ \ 2]\Rightarrow u^*(t)=-2x_1(t)+x_2(t),\ \text{قطبها}:\begin{cases}s=-2\\s=1\pm i\end{cases}\ \times$$

$$2)\ K=\begin{bmatrix}8&4\\4&4\end{bmatrix}\Rightarrow F=[-2\ \ -2]\Rightarrow u^*(t)=-2x_1(t)-2x_2(t),\ \text{قطبها}:\begin{cases}s=-1-i\\s=-1+i\end{cases}\ \checkmark$$

پس با حل دستگاه

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\\ u(t)=-2x_1(t)-2x_2(t)\end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases}x_1(t)=10e^{-t}(\cos t+\sin t)\\ x_2(t)=-20e^{-t}\sin t\\ u(t)=20e^{-t}(\sin t-\cos t)\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases},\quad J=\int_0^{10}\left[4x_1^2(t)+u^2(t)\right]dt$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}8&0\\0&0\end{bmatrix},\ R=2\ \Rightarrow$$

$$K(t)=\phi_{22}(t_f,t)^{-1}\phi_{21}(t_f,t)$$

$$\phi(t_f,t)=\mathcal{L}^{-1}\left[sI-\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\\-8&0&0&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\right]^{-1}\Bigg|_{t\to 10-t}$$

$$\Rightarrow u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix},\quad \begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}\Rightarrow$$

با حل این معادلات داریم که

$$u(t)=\frac{-2e^{4t}(x_1(t)-x_2(t))-2e^{40}(x_1(t)+x_2(t))+4e^{2(10+t)}(\cos(20-2t)x_1(t)+\sin(20-2t)x_2(t))}{e^{40}+e^{4t}+2e^{20+2t}(2+\cos(20-2t))}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}\Rightarrow$$

معادله را مستقیماً نمی توان حل کرد با حل عددی نمودار بسیار شبیه نمودار قبلی می شود. چون در حالت قبلی هم در $t=10s$ کنترل تمام شده بود. ولی در حالت بعد اختلاف داریم.

ج)
$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}\Rightarrow J=\int_0^{4}\left[4x_1^2(t)+u^2(t)\right]dt$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}8&0\\0&0\end{bmatrix},\ R=2\ \Rightarrow$$

$$K(t)=\phi_{22}(t_f,t)^{-1}\phi_{21}(t_f,t)$$

$$\phi(t_f,t)=\mathcal{L}^{-1}\left[sI-\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\\-8&0&0&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\right]^{-1}\Bigg|_{t\to 4-t}$$

$$\Rightarrow u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\Rightarrow$$

با حل این معادلات داریم که $\Rightarrow$

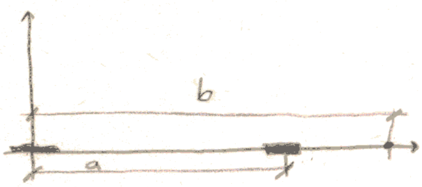
$$u(t)=\frac{-2e^{4t}(x_1(t)-x_2(t))-2e^{16}(x_1(t)+x_2(t))+2e^{2t+8}(\cos(t-4)x_1(t)+\sin(8-2t)x_2(t))}{e^{16}+e^{4t}+2e^{2t+8}(2+\cos(2t-8))}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}\Rightarrow$$

کمی فرق می کند چون در $t=4s$ هم کنترل به حالت ماندگار نرسیده است.

۵-۱۹)

$$\begin{cases}x_M(t)=a+0.1t^3\\ y_M(t)=0\end{cases}$$



الف) ب)
$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases},\quad |u(t)|\leq 1$$

$$\begin{rcases}x_1(0)=0\\ u(t)=1\end{rcases}\Rightarrow \dot{x}_2(t)=1\Rightarrow x_2(t)=t+c\Rightarrow \begin{rcases}\dot{x}_1(t)=t+c\\ \dot{x}_1(0)=0\end{rcases}\Rightarrow \dot{x}_1(t)=t\Rightarrow \begin{rcases}x_1(t)=\frac{1}{2}t^2+c_1\\ x_1(0)=0\end{rcases}\Rightarrow x_1(t)=\frac{1}{2}t^2\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ x_1 = b \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 = \sqrt{2b}$$

زمان رسیدن هواپیما به نقطه b در حداقل زمان

$$\left.\begin{array}{l} x_M = a + 0.1t^3 \\ x_M = b \end{array}\right\} \Rightarrow t_2 = \sqrt[3]{10(b-a)}$$

زمان رسیدن موشک به نقطه b

$$\Rightarrow t_1 \leq t_2 \Rightarrow \sqrt{2b} \leq \sqrt[3]{10(b-a)} \Rightarrow$$

$$4b^3 \leq 5(b-a)^2$$ رابطه بین a و b برای برخورد

ج) i) $4b^3 < 5(b-a)^2$

ii) $4b^3 = 5(b-a)^2$

iii) $4b^3 > 5(b-a)^2$

۵-۲۰)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x(t_f) = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq x_1(t) \leq e \\ x_2(t) \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq u_1(t) \leq M \\ -M \leq u_2(t) \leq 0 \end{cases}, \quad J = \int_{t_0}^{t_f} dt, \quad M_1 = M_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$H = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(u_1(t) + u_2(t)) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \\ p_2(t)(u_1(t) + u_2(t))\big|_{min} \Rightarrow \underbrace{u_1(t) + u_2(t)}_{u(t)} = \begin{cases} -M & p_2(t) > 0 \\ M & p_2(t) < 0 \\ \text{نامعلوم} & p_2(t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1(t) = c_1 \\ p_2(t) = -c_1 t + c_2 \\ u(t) = \begin{cases} -M & -c_1 t + c_2 > 0 \\ M & -c_1 t + c_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow u(t) = \begin{cases} -M & t \geq t_1 \\ M & t < t_1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = \int_{t_0}^{t} u(t)dt \\ x_1(t) = \int_{t_0}^{t} x_2(t)dt \end{cases} \xrightarrow{t \to t_f} \begin{cases} 0 = M(t_1 - t_0) - M(t_f - t_0) \Rightarrow t_1 = \frac{t_0 + t_f}{2} \\ \cdots \end{cases} \end{cases}$$

این همان جواب داده شده در مثال (۳-۱۰-۱) در شکل ۱-۶ است.

۵-۲۱)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad x(t_f) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad J = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

$$H = 1 + p_1(t)(x_2(t)) + p_2(t)(u(t)) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \begin{cases} \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(t) = c_1 \\ p_2(t) = -c_1 t + c_2 \end{cases} \\ p_2(t)u(t)\big|_{min} \Rightarrow u(t) = \begin{cases} -1 & p_2(t) > 0 \\ 1 & p_2(t) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

حداکثر ۱ بار می‌تواند کلید زده شود پس

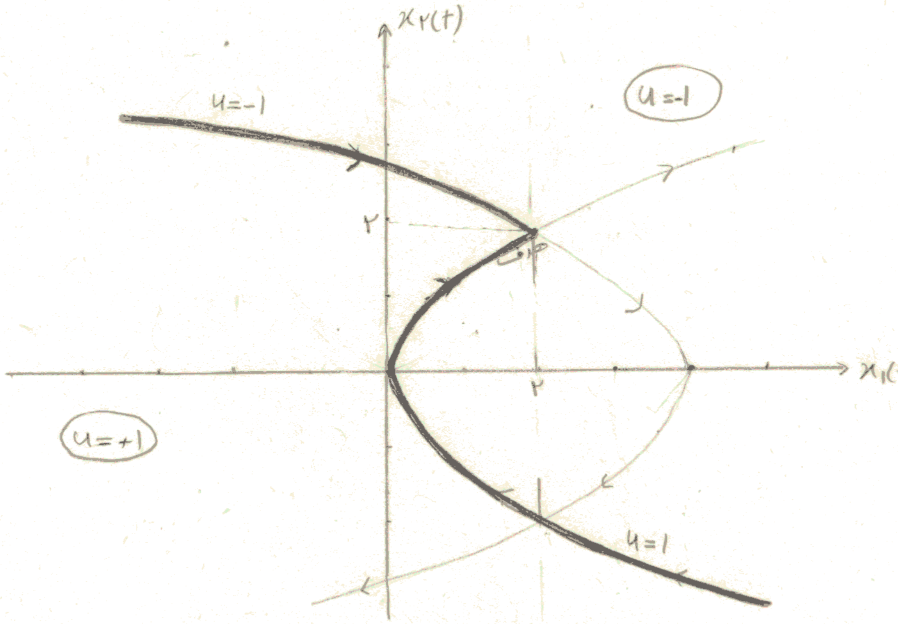
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_0, t_f] \\ \text{یا} & \\ -1 & t \in [t_0, t_f] \\ \text{یا} & \\ 1 & t \in [t_0, t_f], \; -1 \;\; t \in [t_1, t_f] \\ \text{یا} & \\ \cdots & t \in [t_0, t_1], \; \cdots \;\; t \in [t_1, t_f] \end{cases}$$

حال فرض کنیم $u=\pm 1$:

$$\begin{cases} x_2(t)=\pm t+c_3 \\ x_1(t)=\pm\frac{1}{2}t^2+c_3t+c_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(0)=2 \\ x_2(0)=2 \\ t\to t-t_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t)=\pm t+2 \\ x_1(t)=\pm\frac{1}{2}t^2+2t+2 \\ t\to t-t_f \end{cases} \Rightarrow$$

$$u=1: \begin{cases} x_2(t)=t+2 \\ x_1(t)=\frac{1}{2}t^2+2t+2 \\ x_1(t)=\frac{1}{2}x_2^2(t) \end{cases} ; \quad x_2(t)\leq 2$$

$$u=-1: \begin{cases} x_2(t)=-t+2 \\ x_1(t)=-\frac{1}{2}t^2+2t+2 \\ x_1(t)=-\frac{1}{2}x_2^2(t)+4 \end{cases} ; \quad x_2(t)\geq 2$$



۵-۲۲)

الف) $\begin{cases} \dot{x}_1(t)=-x_1(t)-u(t) \\ \dot{x}_2(t)=-2x_2(t)-2u(t) \end{cases}$ و $J=\int_{t_0}^{t_f} dt$, $|u(t)|\leq 1$, $x(t_f)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$$H=1+p_1(t)(-x_1(t)-u(t))+p_2(t)(-2x_2(t)-2u(t)) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=-x_1(t)-u(t) \\ \dot{x}_2(t)=-2x_2(t)-2u(t) \\ \begin{cases} \dot{p}_1(t)=+p_1(t) \\ \dot{p}_2(t)=+2p_2(t) \end{cases} \Rightarrow \\ -(p_1(t)+2p_2(t))u(t)\Big|_{min} \Rightarrow \begin{cases} 1 & p_1(t)+2p_2(t)>0 \\ -1 & p_1(t)+2p_2(t)<0 \end{cases} \end{cases}$$

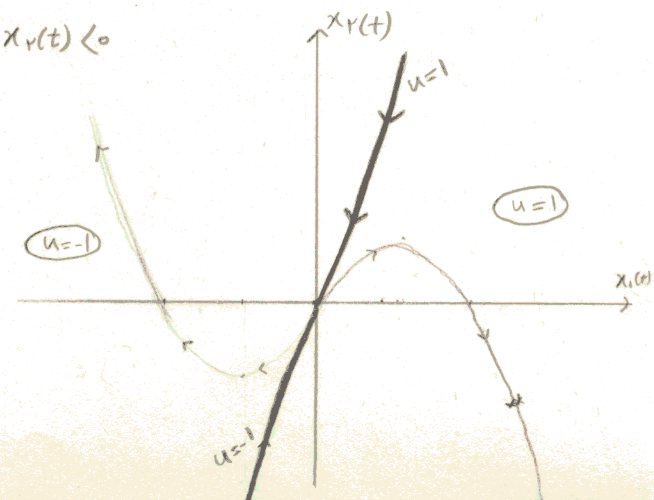
$$u(t)=\begin{cases} 1 & t\in[t_0,t_f] \\ -1 & t\in[t_0,t_f] \\ 1 \quad t\in[t_0,t_1] , & -1 \quad t\in[t_1,t_f] \\ -1 \quad t\in[t_0,t_1] , & 1 \quad t\in[t_1,t_f] \end{cases}$$

یکبار سوئیچ داریم پس داریم که

با جاگذاری $\begin{cases} u=\pm 1 \\ \begin{cases} x_1(0)=0 \\ x_2(0)=0 \\ t\to t-t_f \end{cases} \end{cases}$ داریم:

$$u=1: \begin{cases} x_1(t)=e^{-t}-1 \\ x_2(t)=e^{-2t}-1 \\ x_2(t)=(x_1(t)+1)^2-1 \end{cases} \Rightarrow u=1: x_2(t)=x_1^2(t)+2x_1(t) \quad ; \quad x_2(t)>0$$

$$u=-1: \begin{cases} x_1(t)=1-e^{-t} \\ x_2(t)=1-e^{-2t} \\ x_2(t)=1-(1-x_1(t))^2 \end{cases} \Rightarrow u=-1: x_2(t)=-x_1^2(t)+2x_1(t) \quad : \quad x_2(t)<0$$



ب)
$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=a_1x_1(t)+a_1u(t)\\ \dot{x}_2(t)=a_2x_2(t)+a_2u(t)\end{cases},\quad (a_2<a_1<0),\quad J=\int_{t_0}^{t_f}dt,\quad x_f=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad |u(t)|\leq 1$$

$$H=1+p_1(t)(a_1x_1(t)+a_1u(t))+p_2(t)(a_2x_2(t)+a_2u(t))\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=a_1x_1(t)+a_1u(t)\\ \dot{x}_2(t)=a_2x_2(t)+a_2u(t)\\ \dot{p}_1(t)=-a_1p_1(t)\\ \dot{p}_2(t)=-a_2p_2(t)\\ (a_1p_1(t)+a_2p_2(t))u(t)\Big|_{min}\end{cases}$$

یکبار کلیدزنی داریم:

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\in[t_0,t_f]\\ -1 & t\in[t_0,t_f]\\ 1 \quad t\in[t_0,t_1], & -1 \quad t\in[t_1,t_f]\\ -1 \quad t\in[t_0,t_1], & 1 \quad t\in[t_1,t_f]\end{cases}$$

با جایگذاری داریم:
$$\begin{cases}u(t)=\pm 1\\ x_1(0)=0,\ x_2(0)=0\\ t\to t-t_f\end{cases}$$

$$u=1:\begin{cases}x_1(t)=e^{a_1t}-1\\ x_2(t)=e^{a_2t}-1\\ x_2(t)=(x_1(t)+1)^{\frac{a_2}{a_1}}-1\end{cases}\Rightarrow u=1:\ x_2(t)=(x_1(t)+1)^{\frac{a_2}{a_1}}-1\ ;\ x_2(t)>0$$

$$u=-1:\begin{cases}x_1(t)=1-e^{a_1t}\\ x_2(t)=1-e^{a_2t}\\ x_2(t)=1-(1-x_1(t))^{\frac{a_2}{a_1}}\end{cases}\Rightarrow u=-1:\ x_2(t)=1-(1-x_1(t))^{\frac{a_2}{a_1}}\ ;\ x_2(t)<0$$

۵-۲۳)

الف)
$$\begin{cases}m\ddot{x}(t)=T\cos u(t)\\ m\ddot{y}(t)=T\sin u(t)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\ddot{x}(t)=\frac{T}{M}\cos(u(t))\\ \ddot{y}(t)=\frac{T}{M}\sin(u(t))\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\frac{T}{M}\cos(u(t))\\ \dot{x}_2(t)=\frac{T}{M}\sin(u(t))\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}x(0)=0\\ y(0)=0\end{cases},\quad\begin{cases}\dot{x}(t_f)=V\\ \dot{y}(t_f)=0\end{cases},\quad\{y(t_f)=D,\quad J=\int_0^{t_f}dt$$

$$H=1+p_1(t)\left(\frac{T}{M}\cos(u(t))\right)+p_2(t)\left(\frac{T}{M}\sin(u(t))\right)\Rightarrow$$

معادلات لازم:
$$\dot{x}_1(t)=\frac{T}{M}\cos(u(t)) \quad (1)$$
$$\dot{x}_2(t)=\frac{T}{M}\sin(u(t)) \quad (2)$$
$$\dot{p}_1(t)=0 \quad (3)$$
$$\dot{p}_2(t)=0 \quad (4)$$
$$-\frac{T}{M}\sin(u(t))p_1(t)+\frac{T}{M}\cos(u(t))p_2(t)=0 \quad (5)$$

شرایط مرزی:
$$x_1(t_f)=V \quad (6)$$
$$x_2(t_f)=0 \quad (7)$$
$$1+p_1(t_f)\left(\frac{T}{M}\cos(u(t_f))\right)+p_2(t_f)\left(\frac{T}{M}\sin(u(t_f))\right)=0 \quad (8)$$
$$\int_0^{t_f}x_2(t)\,dt=D \quad (9)$$
$$x_1(0)=x_2(0)=0 \quad (10)$$

ج)

$$\begin{cases} p_1(t) = c_1 \\ p_2(t) = c_2 \end{cases} \xrightarrow{⑤} \tan(u(t)) = \frac{c_2}{c_1} \xrightarrow[⑩]{①,②} \begin{cases} x_1(t) = \frac{T}{M}\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\,t \\ x_2(t) = \left(\frac{T}{M}\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} - g\right)t \end{cases} \xrightarrow[⑧,⑨]{⑥,⑦}$$

این روابط $u(t)$ و $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را می‌دهد. حال شرایط حدی را ساده می‌کنیم

$$\begin{cases} \frac{T}{M}\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\,t_f = v \\ \left(\frac{T}{M}\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} - g\right)t_f = 0 \longrightarrow \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \\ 1 + \frac{T}{M}\frac{c_1^2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} + \frac{T}{M}\frac{c_2^2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} - c_2 g = 0 \\ \left(\frac{T}{M}\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} - g\right)\frac{t_f^2}{2} = D \\ . \end{cases}$$

(۵-۲۴

الف) $\begin{cases}\dot{x}(t)=2x(t)+u(t)\\ |u(t)|\leq 1\end{cases}$

$$\dot{x}(t)=2x(t)+u(t)\Rightarrow x(t)=x_0e^{2t}+e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}u(\tau)d\tau \Rightarrow \begin{cases}u(t)=1\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2}e^{2t}+x_0e^{2t}-\frac{1}{2}\\ u(t)=-1\Rightarrow x(t)=-\frac{1}{2}e^{2t}+x_0e^{2t}+\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$x(t_f)=0\Rightarrow\begin{cases}t_f=-\frac{1}{2}\ln(2x_0+1)\\ t_f=-\frac{1}{2}\ln(1-2x_0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<2x_0+1<1\Rightarrow\\ 0<1-2x_0<1\Rightarrow\end{cases}\begin{cases}-\frac{1}{2}<x_0<0\\ 0<x_0<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2}<x_0<\frac{1}{2}}$$

کنترل بهینه داریم.

ب) $\begin{cases}\dot{x}_i(t)=a_ix_i(t)+b_iu(t)\\ |u(t)|\leq 1\end{cases}\quad ,i=1,2,\dots,n$

$$\dot{x}_i(t)=a_ix_i(t)+b_iu(t)\Rightarrow x_i(t)=x_{0i}e^{a_it}+e^{a_it}\int_0^t e^{-a_i\tau}b_iu(\tau)d\tau\Rightarrow$$

$$\begin{cases}b_iu(t)=|b_i|\\ b_iu(t)=-|b_i|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_i(t)=\frac{-|b_i|+e^{a_it}(a_ix_0+|b_i|)}{a_i}\\ x_i(t)=\frac{|b_i|+e^{a_it}(a_ix_0-|b_i|)}{a_i}\end{cases}\ x(t_f)=0 \Rightarrow\begin{cases}t_f=\frac{1}{a_i}\ln\left(\frac{|b_i|}{a_ix_0+|b_i|}\right)\\ t_f=\frac{1}{a_i}\ln\left(\frac{|b_i|}{|b_i|-a_ix_0}\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$a_i<0\Rightarrow\begin{cases}|b_i|<a_ix_0+|b_i|\Rightarrow x_0<0\\ |b_i|<|b_i|-a_ix_0\Rightarrow x_0>0\end{cases}\Rightarrow$$ $a_i<0$ جواب بهینه داریم $\forall x_0$

$$a_i>0\Rightarrow\begin{cases}|b_i|>a_ix_0+|b_i|>0\\ |b_i|>|b_i|-a_ix_0>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0<0\ ,\ x_0>-\frac{|b_i|}{a_i}\\ x_0>0\ ,\ x_0<\frac{|b_i|}{a_i}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{|b_i|}{a_i}<x_0<0\\ 0<x_0<\frac{|b_i|}{a_i}\end{cases}\Rightarrow |x_0|<\frac{|b_i|}{a_i}$$

$\Rightarrow$ شرط اولیه برای x_0: $\begin{cases}a_i<0 & \forall x_0\\ a_i>0 & : |x_0|<\frac{|b_i|}{a_i}\end{cases}$

(۵-۲۵

$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)\\ |u(t)|\leq 1\end{cases}\Rightarrow$ مقادیر ویژه A برای (n-1) بار تغییر علامت (+) ، $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-2x_1(t)-2x_2(t)+u(t)\\ |u(t)|\leq 1\end{cases}$

الف) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}\Rightarrow |KI-A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}K&-1\\2&K+2\end{vmatrix}=0\Rightarrow K^2+2K+2=0\Rightarrow K=-1\pm\sqrt{2}\,i$

ب) $H=1+P_1(t)(x_2(t))+P_2(t)(-2x_1(t)-2x_2(t)+u(t))\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-2x_1(t)-2x_2(t)+u(t)\\ \dot{P}_1(t)=2P_2(t)\\ \dot{P}_2(t)=2P_2(t)-P_1(t)\\ P_2(t)u(t)\Big|_{min}\Rightarrow u(t)=\begin{cases}1 & P_2(t)<0\\ -1 & P_2(t)>0\end{cases}\end{cases}$

پس باید $|u(t)|=1$ تا کنترل بهینه گردد.

ج) در صفحه بعد

«حل مسائل کنترل بهینه» «فصل ۵»

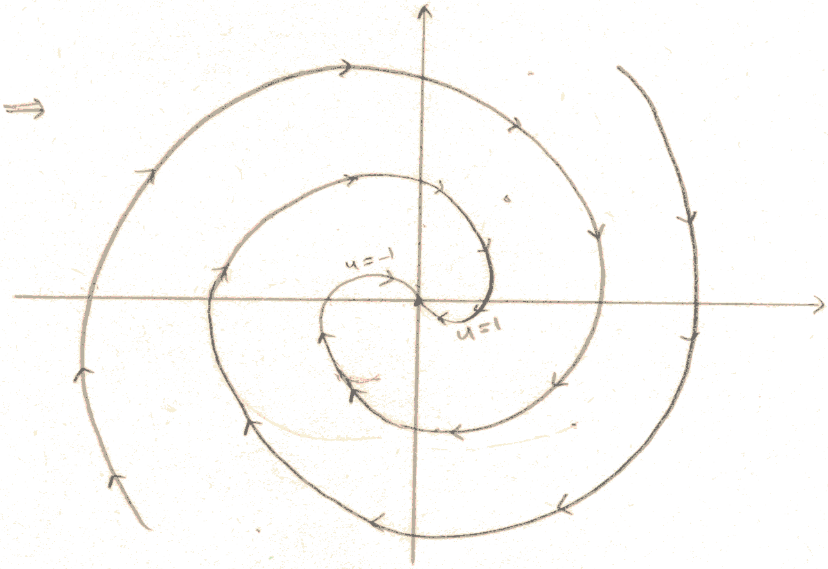
$$\begin{cases}\dot{p}_1(t)=2p_2(t)\\ \dot{p}_2(t)=2p_2(t)-p_1(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1(t)=e^{t}\left((c_2-c_1)\cos t+(c_2+c_1)\sin t\right)\\ p_2(t)=e^{t}(c_1\sin t+c_2\cos t)\end{cases}$$

این نشان می دهد که چون تابع مثلثاتی داریم تعداد زیادی تغییر علامت برای $p_2(t)$ و در نتیجه برای $u(t)$ داریم. پس تعداد تغییر علامتها بیش از ۱ است.

حال با حل معادله داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-2x_1(t)-2x_2(t)+u(k)\\ x_1(0)=x_2(0)=0\end{cases}\Bigg/_{t\to t-t_f}\Rightarrow$$

$$u=\pm1\Rightarrow\begin{cases}x_1(t)=-\frac{1}{2}\left(1\pm(\cos t+\sin t)\,e^{-t}\right)\\ x_2(t)=\pm\sin t\,e^{-t}\end{cases}\Rightarrow$$



(۵-۲۶)

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=u(t)\end{cases},\quad |u(t)|\leq 1$$

$$H=1+p_1(t)x_2(t)+p_2(t)x_3(t)+p_3(t)u(t)\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=u(t)\\ \dot{p}_1(t)=0\\ \dot{p}_2(t)=-p_1(t)\\ \dot{p}_3(t)=-p_2(t)\\ p_3(t)u(t)\big/_{min}\end{cases}\Rightarrow u(t)=\begin{cases}-1 & p_3(t)>0\\ 1 & p_3(t)<0\end{cases}$$

با حل معادلات: $p_3(t)=\frac{1}{2}t^2c_1-tc_2+c_3$

حداکثر ۲ بار سوئیچ داریم؛
پس حالتهای زیر را داریم:

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\in[t_0,t_f]\\ -1 & t\in[t_0,t_f]\\ 1\ \ t\in[t_0,t_1] & -1\ \ t\in[t_1,t_f]\\ -1\ \ t\in[t_0,t_1] & 1\ \ t\in[t_1,t_f]\\ 1\ \ t\in[t_0,t_1] & -1\ \ t\in[t_1,t_2]\quad 1\ \ t\in[t_2,t_f]\\ -1\ \ t\in[t_0,t_1] & 1\ \ t\in[t_1,t_2]\quad -1\ \ t\in[t_2,t_f]\end{cases}$$